

## Bir Matematik Öğretmeni Adayının Çemberde Kiriş ve Teğetin Özelliklerini Keşfederken Yararlandığı GeoGebra Tabanlı Yönlendirici Destekler\*

GeoGebra-based Scaffolding of a Prospective Mathematics Teacher's Learning While Exploring the Properties of Chord and Tangent in Circle

Candaş Uygan\*\*

Gülay Bozkurt\*\*\*

### To cite this article/ Atf için:

Uygan, C. ve Bozkurt, G. (2019). Bir matematik öğretmeni adayının çemberde kiriş ve teğetin özelliklerini keşfederken yararlandığı GeoGebra tabanlı yönlendirici destekler. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi – Journal of Qualitative Research in Education*, 7(4), 1651-1680. doi: 10.14689/Issn.2148-2624.1.7c.4s.15m

**Öz:** Bu çalışmanın amacı, bir matematik öğretmeni adayının GeoGebra'daki geometrik bir inşa problemi kapsamında çemberde kiriş ve teğetin merkez nokta ile ilişkisini keşfederken aldığı GeoGebra tabanlı yönlendirici destekleri ve bu sırada gerçekleştirdiği akıl yürütme süreçlerini araştırmaktır. Araştırmada, nitel paradigma benimsenmiş ve Türkiye'deki bir devlet üniversitesinde öğrenim gören bir ilköğretim matematik öğretmeni adayı ile görev-tabanlı görüşme gerçekleştirilmiştir. Görüşme sırasında katılımcıya GeoGebra'da çemberin merkez noktasını farklı stratejilerle oluşturma görevi sunulmuştur. Veriler, video-kamera ve ekran kaydedici yazılımı ile toplanmış ve katılımcının akıl yürütme süreçleri, görev sırasında ihtiyaç duyduğu GeoGebra tabanlı yönlendirici destekler ve bu destekler içinde özel bir yeri olan sürüklenme türleri analiz edilmiştir. GeoGebra tabanlı yönlendirici destekler sadece yazılım araçlarının sağladığı destekler ve görüşmecinin yazılımdaki işlemsel ve matematiksel yönlendirici destekleri olmak üzere üç boyutta ele alınmıştır. Analizler sonucunda, katılımcının yararlandığı çeşitli GeoGebra tabanlı yönlendirici destekler yardımıyla geri-çıkarm, tümdengelimli ve tümevarımsal akıl yürütme süreçlerini gerçekleştirdiği; çemberin kiriş ve teğetine ait çeşitli özellikleri keşfettiği görülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Matematik öğretmeni adayı, çember, dinamik geometri yazılımı, yönlendirici destek, sürüklenme türleri, akıl yürütme süreçleri

**Abstract:** The aim of this study is to investigate GeoGebra-based scaffolding and the reasoning processes of a prospective mathematics teacher while exploring chord and tangent's relations with centre point in circle within the scope of a geometric construction problem in GeoGebra. In this study, qualitative paradigm is adopted and a task-based interview is conducted with a prospective mathematics teacher enrolled in a mathematics teacher education program at a state university located in central Turkey. During the interview, the participant was given a task about construction of the centre point of a circle with different strategies in GeoGebra. Data were collected through video-camera looking at the participant's working environment and screen recorder software. The participant's reasoning processes, GeoGebra-based scaffolding needed during the task and also used dragging modalities were analysed. GeoGebra-based scaffolding consisted of three dimensions: the support provided by the software tools and also the operational and mathematical support by the interviewer. The findings of this study indicated that GeoGebra-based scaffolding became an effective way to support the prospective teacher's abductive, inductive and deductive reasoning processes in construction tasks and enabled her to discover various properties of chord and tangent in circle.

**Keywords:** Prospective mathematics teacher, circle, dynamic geometry software, scaffolding, dragging modalities, reasoning processes.

### **Makale Hakkında**

Gönderim Tarihi: 07.04.2019

Düzeltilme Tarihi: 17.10.2018

Kabul Tarihi: 23.10.2019

\* Bu çalışmanın bir kısmı, International Conference on Education in Mathematics, Science & Technology (ICEMST 2018) Kongresi'nde bildiri olarak sunulmuştur.

\*\* Sorumlu Yazar / Correspondence: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Türkiye, e-mail: [cuygan@ogu.edu.tr](mailto:cuygan@ogu.edu.tr) ORCID: [0000-0002-2224-5004](https://orcid.org/0000-0002-2224-5004)

\*\*\* Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Türkiye, e-mail: [gbozkurt@ogu.edu.tr](mailto:gbozkurt@ogu.edu.tr) ORCID: [0000-0001-9573-5920](https://orcid.org/0000-0001-9573-5920)

## Giriş

Uluslararası düzeyde yapılan sınav sonuçlarına (Programme for International Student Assessment [PISA], Trends in International Mathematics and Science Study [TIMSS]) bakıldığında geometri öğretimine önem verilmesi gerektiği vurgulanmaktadır (Eğitimi Araştırma ve Geliştirme Dairesi Başkanlığı [EARGED], 2003; 2011). Öğrencilerin geometri öğrenme süreçlerinin geliştirilmesinde gerek Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (NCTM) (2000) raporlarında, gerekse matematik öğretim programlarında (MEB, 2018a; MEB, 2018b) geometri öğretiminde Dinamik Geometri Yazılımlarının (DGY) kullanımının önerildiği bilinmektedir. Alanyazında konuya ilişkin yapılan araştırmaların sonuçları da öğrencilerin geometrideki çeşitli kavramları öğrenmelerinde, problem çözme becerisi kazanmalarında, geometrik akıl yürütme ve ispat süreçlerini geliştirmelerinde DGY'lerden yararlanabildiklerini ortaya koymaktadır (Hazzan & Goldenberg, 1997; Healy & Hoyles, 2001; Jones, 2000; Presmeg, Barrett & McCrone, 2007; Soldano & Arzarello, 2016).

Dinamik geometri yazılımı bireylere geometrik kavramlara yönelik matematiksel ilişkileri etkileşimli yollarla çalışabilme ve çeşitli araçlar yardımıyla kavramlara yönelik değişmez özellikleri keşfedebilme olanağı sunmaktadır (Laborde, 2001; 2005). Bu yazılım içerdiği kendine özgü geometrik temsil biçimleriyle kalemle kâğıt üzerine basitçe yapılan geometrik çizimlerden farklılaşmaktadır. Bu farklılığın anlaşılmasında "figür" ve "çizim" olarak adlandırılan (Laborde, 1993, s. 49) iki ayrı matematiksel temsil biçiminin bilinmesi gerekmektedir. Geleneksel öğrenme ortamlarında kâğıt ya da yazı tahtası üzerinde kalem ile yapılan bir çizim, sınırlı doğası gereği tek başına bazı geometrik kavramların özelliklerini yansıtmada yetersiz kalabilmektedir (Tapan-Broutin, 2014; 2016). Örneğin bir paralelkenar çizimi, paralelkenar olarak tanımlanan geometrik yapının oluşturduğu kümenin elemanlarından bir tanesini temsil etmektedir ve kümeye ait değişmez özelliklerin tümünü yansıtmamaktadır. Diğer yandan figür, bir geometrik kavrama ilişkin değişmez özellikler dikkate alınarak inşa edilmektedir (Tapan-Broutin, 2010). Bu özelliğinden dolayı figür, geometrik kavrama ilişkin kümenin tüm elemanlarının özelliklerini yansıtmakta ve geometrik kavrama ilişkin zihinde beliren bir görüntüyü kâğıda çizmekten farklı bir süreci içermektedir (Uygan, 2016). Geleneksel ortamda figürün karşılığı -Öklid'in ispatlarında olduğu gibi- pergel ve çizgeç kullanılarak ve matematiksel ilişkiler dikkate alınarak yapılan geometrik inşalardır. Diğer taraftan DGY'de oluşturulan figürler üzerinde dinamik manipülasyonlar gerçekleştirilebilmekte ve bu manipülasyonlar sırasında figürlerin sahip olduğu geometrik ilişkilerin değişmediği gözlenmektedir. DGY'deki figürlere özgü bu özellik harekete dayanıklılık (robustness) olarak isimlendirilmektedir ve çizim-figür farkını görmeye yardım etmektedir (Laborde, 2005; Tapan-Broutin, 2016). Figürün hareketi ise sürükleme (dragging) aracılığıyla sağlanmakta olup DGY'yi geleneksel öğretim araçlarından ayıran ve bu teknolojinin dinamik bir öğrenme ortamına sahip olmasına olanak veren önemli bir özelliğidir (Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 2002).

Figürler üzerinde geometrik kavramların DGY ile keşfedilmesine yönelik çalışmalar incelendiğinde çeşitli geometrik kavramların çember kavramıyla ilişkisinin keşfine odaklanıldığı görülmektedir (Arzarello vd., 2002; Baccaglini-Frank, 2010; Leung, Baccaglini-Frank & Mariotti, 2013). Bu anlamda, Öklid geometrisinin temel kavramlarından biri olan çember kavramının geometrik inşa ve ispat süreçlerinde kritik bir yere sahip olduğu bilinmektedir (Euclid, n.d., s. 3). Bu nedenle hem uluslararası standartlar (Common Core State Standards Initiative, 2010) hem de Türkiye'deki öğretim programları (MEB, 2018a, 2018b) çember kavramının ve temel özelliklerinin öğrenimine önem vermektedirler. Son yıllarda Akyüz (2016),

yürüttüğü tasarım tabanlı araştırmasında, DGY'nin çember kavramının özelliklerinin kavramsal olarak keşfedilme sürecine destek sağladığına işaret etmiştir. Buna rağmen, özel olarak çemberin ve çemberle ilişkili giriş ve teğet kavramlarının özelliklerinin öğreniminde DGY'nin nasıl bir rolü olduğuna ilişkin az sayıda çalışmanın yapıldığı görülmektedir. Dolayısıyla bu çalışmada DGY'nin bir matematik öğretmeni adayının çember ve özellikleriyle ilgili akıl yürütme süreçlerini nasıl desteklediğinin ve yön verdiğinin derinlemesine adım adım incelenmesi amaçlanmıştır. Bu anlamda yapılan çalışmanın alanyazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

### Teorik Çerçeve

Bu çalışmanın teorik çerçevesini üç temel kavram oluşturmaktadır: yönlendirici destek (Vygotsky, 1978), akıl yürütme süreçleri (Peirce, 1960) ve sürüklenme türleri (Arzarello vd., 2002).

#### Yönlendirici Destek

Vygotsky'nin görüşüne göre, gelişim her zaman öğrencinin öğrenme potansiyeline bağlıdır ve yakınsal gelişim alanı (YGA) kavramı öğrenme ile bilişsel gelişim arasındaki ilişkiyi açıklamaktadır. Vygotsky (1978), YGA'yı, "bağımsız problem çözebilme ile belirlenen gerçek gelişim düzeyi ile yetişkin rehberliği altında veya daha yetenekli akran ile işbirliği içinde problem çözebilme yoluyla belirlenen potansiyel gelişim düzeyi arasındaki mesafe" olarak tanımlamıştır (s. 86). Diğer bir ifadeyle, YGA kavramı ile öğrencinin hâlihazırdaki gelişim düzeyinden, öğretimsel araçlar/materyaller ve yetenekli yetişkin veya akranları ile etkileşimi aracılığıyla ulaşılacak bir sonraki seviyeye geçiş vurgulanmaktadır. Bu noktada, sınıf içi eğitim-öğretim faaliyetlerinin öğrencilerin etkinliklere katılımını sağlayacak şekilde öğrenme deneyimlerine uygun olması ve öğretmenin amacına yönelik belirlediği araç ve materyallerden nasıl faydalanacağına dair detaylı bir plan hazırlaması önem arz etmektedir.

YGA kavramı ile yakından ilişkili olan diğer önemli bir kavram *yönlendirici destek* (scaffolding) kavramıdır (Şekil 1). Wells (1999), yönlendirici destek kavramını "Vygotsky'nin yakınsal gelişim alanında çalışma kavramını işlevsel hale getirmenin bir yolu" (s. 127) olarak tanımlamıştır. Öğrenmeye aracılık eden araçların rolünü de yönlendirici destek kavramının önemli özelliklerinden biri olarak vurgulamaktadır (Wells, 1999).



Şekil 1. Yakınsal Gelişim Alanı (YGA) ve Yönlendirici Destek (Gabillon & Ailincı, 2016, s. 28'den düzenlenmiştir)

Matematik öğretiminde dijital teknolojilerin kullanımı, özellikle görselleştirme ve içerdiği mevcut teknikler anlamında öğrenci öğrenimini etkilemesi açısından önem arz etmektedir (Hoyle & Noss, 2003). Bu noktada alanyazındaki çeşitli araştırmalar DGY'nin farklı yaş gruplarındaki öğrencilerin üçgenler, dörtgenler ve çemberin özelliklerine yönelik akıl yürütme süreçlerinde önemli bir destek aracı olduğu bilinmektedir (Arzarello vd., 2002; Baccaglını-Frank & Mariotti, 2010; Jones, 2000; Leung & Lopez-Real, 2002). Özel olarak, Dove ve Hollebrands (2014) öğretmenlerin geleneksel öğrenme ortamlarında sağladıkları yönlendirici desteklere kıyasla DGY destekli öğrenme ortamlarındaki yönlendirici desteklerin daha üst düzeyde olduğuna ve bu anlamda kavramsal öğrenmeyi geliştirici olanaklar yarattıklarına vurgu yapmışlardır. Bu anlamda, geometrik kavramlara ilişkin öğrenme süreçlerinde DGY tabanlı yönlendirici desteklerin önemli bir yere sahip olduğu düşünülmektedir.

Diğer yandan bir öğretmen adayının çember ve özelliklerine ilişkin akıl yürütme süreçlerinin hangi kavramsal sınıflandırma ışığında incelendiği ve gelişiminde DGY'nin nasıl bir role sahip olduğu sonraki alt başlıkta ele alınmıştır.

### Akıl Yürütme Türleri

Matematik öğrenimi içerisinde temel süreç standartlarından biri olarak ele alınan akıl yürütmenin tüm öğrenme alanları içerisinde kritik bir yere sahip olduğu bilinmektedir (NCTM, 2000). Akıl yürütme, matematiğin farklı öğrenme alanlarıyla ilişkili olarak literatürde cebirsel akıl yürütme (Carpenter & Franke, 2001), sayısal akıl yürütme (Thompson, 1993) ve geometrik akıl yürütme (Mariotti, 1992) gibi çeşitli sınıflandırmalar kapsamında ele alınırken, bu çalışmada bir mantıksal çıkarım yöntemi olarak ele alınmış ve Peirce'nin (1960) tanımladığı üç akıl yürütme türü kavramsal çerçeve olarak kullanılmıştır: tümdengelim, tümevarım, geri-çıkarm (abduction). Yapılan çalışmada Peirce'nin sınıflandırmasının temel alınmasının en önemli nedeni, söz konusu kavramların DGY destekli geometri öğrenimine ilişkin pek çok araştırmanın da odağında yer almasıdır (Arzarello vd., 2002; Baccaglını-Frank & Mariotti, 2010; Jones, 2000; Leung & Lopez-Real, 2002).

Peirce (1960) tümdengelim, tümevarım ve geri-çıkarm türündeki akıl yürütme biçimlerini açıklarken şu örneği kullanmaktadır:

*“Bir çantanın bezelye ile dolu olduğu bilinsin. Şu önermeler üzerinde düşünelim. A) elimdeki bezelyeler beyaz; B) çantadaki bezelyeler beyaz; C) bu bezelyeler bu çantadan. Bir tündengelim doğru olduğu bilinen B ve C önermelerinden yola çıkarak A sonucuna ulaşan bir akıl yürütme biçimidir. Bir tümevarım ise doğruluğu bilinen A ve C önermeleri üzerinden B sonucuna ulaşmaktadır. Diğer yandan geri-çıkarm A ve B önermelerinden yola çıkarak C sonucuna varan bir akıl yürütme biçimidir” (s. 372).*

Bu noktada, tündengelimli akıl yürütmede bir kavramın tanımlanmış olan özellikleri dikkate alınarak bu kavramın içerdiği bir nesnenin özelliklerine yönelik çıkarım yapılmaktadır. İkinci olarak tümevarımsal akıl yürütme sürecinde bir kavramsal sınıflandırmaya dâhil olan bazı örnek nesnelerin keşfedilen özelliklerinden yola çıkılarak bu nesnelere içine alan kavramın özelliklerine yönelik genellemeye ulaşılmaktadır. Üçüncü olarak geri-çıkarm türündeki akıl yürütmede ise özel bir nesnenin gözlenen bazı özellikleri ve hâlihazırda bilinen bir matematiksel kavramın özellikleri ilişkilendirilmekte ve nesnenin bu kavramın içinde yer alıp almadığına yönelik doğruluğu kesin olmayan çıkarımlar yapılmaktadır.

Alanyazındaki çalışmalar, öğrencilerin DGY’de geometrik figürlere yönelik yaptıkları incelemelerin akıl yürütme süreçlerine destek verdiğini ortaya koymaktadır. Bu bağlamda Jones (2000) yaptığı boylamsal araştırmada 12 yaş grubundaki öğrencilerin figürlerin dinamik yapıları yardımıyla dörtgenlerin özelliklerine ilişkin düşünme süreçlerini geliştirdikleri ve görevleri tamamlarken figürlerin görünüşlerine dayalı informal açıklamalar yerine geometrik ilişkilere dayanan matematiksel açıklamalar yapmaya başladıkları görülmüştür. Jones’un bulguları DGY’de hazırlanan öğretimsel görevlerin öğrencilerin tündengelimli akıl yürütmelerinin gelişimi için uygun bir zemin hazırladığını göstermiştir. Başka bir çalışmada ise Baccaglini-Frank ve Mariotti’nin (2010) lise düzeyindeki öğrencilerin DGY’deki görevler bağlamında geometrik kavramların özelliklerine yönelik ürettikleri koşullu önerme türündeki varsayımlara odaklandıkları bilinmektedir. Araştırmacılar yaptıkları gözlemlerde öğrencilerin DGY’de özel olarak hazırlanmış geometrik şekillerin çeşitli noktalarını –şekillerdeki belli özellikler korunacak biçimde- hareket ettirdiklerinde (sürüklediklerinde) ortaya çıkan yeni şekillerin ortak özellikleri üzerinden ne tür varsayım ve genellemeler yaptıkları incelenmiştir. Ortaya çıkan sonuçlar geometrik şekiller üzerinde çeşitli yöntemlerle yapılan dinamik incelemelerin öğrencilerin geri-çıkarm süreçlerine destek olduğunu göstermiştir. Bir başka çalışmada Leung ve Lopez-Real (2002) 16 yaş grubundaki öğrencilerin DGY kullanarak kirisler dörtgeninde karşılıklı iç açılarının neden bütünler olduğuna yönelik akıl yürütme ve ispat süreçlerini incelemişlerdir. Araştırmacıların bulgularına göre, öğrencilerin çevrel çemberi çizilemeyen dörtgenlerin de istenen özelliklere sahip olup olmadıklarını inceledikleri, DGY aracılığıyla söz konusu özelliğe sahip olduğu varsayılan bir dörtgen içerisinde matematiksel olarak çelişkili durumları gözlemledikleri ve formal ispat öncesinde tümevarımsal – tündengelimli akıl yürütme süreçleri arasında köprü kurdukları ortaya konmuştur. Söz konusu akıl yürütme süreçlerinin gelişiminde DGY’deki sürüklenme işleminin önemli bir yere sahip olduğu çeşitli araştırmacılar tarafından vurgulanmaktadır (Arzarello vd., 2002; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Olivero, 1999). Sonraki alt başlıkta bu çalışma kapsamında ele alınan sürüklenme türlerine dair sınıflandırmaya yer verilmiştir.

### **Dinamik Geometri Yazılımında Sürüklenme Türleri**

Arzarello Olivero, Paola ve Robutti’nin (2002) çalışması bağlamında DGY’deki geri çıkarm sürecinde önemli bir yere sahip olan sürüklenme fonksiyonunu yedi farklı biçimde kullanılabileceğini vurgulamışlardır. Bunlar rastgele sürüklenme (wandering dragging), kısıtlı sürüklenme (bound dragging), amaçlı sürüklenme (guided dragging), gizli geometrik yer

sürüklemesi (dummy locus dragging), geometrik yeri işaretleyerek sürükleme (line dragging), bağımlı sürükleme (linked dragging) ve sürükleme testi (dragging test) olarak ele alınmıştır. Bu sürükleme türleri açıklamalarıyla birlikte (Köse, Uygan & Özen, 2012) Tablo 1’de görülmektedir.

**Tablo 1.**

*Sürükleme Türlerinin Açıklamaları*

Sürükleme türü	Açıklama
Rastgele Sürükleme	Geometrik bir yapıyı –belli bir plan olmadan– çeşitli şekiller elde etmek ve özelliklerini gözlemek amacıyla çeşitli noktalarından serbestçe sürükleme tekniği
Kısıtlı Sürükleme	Herhangi bir şekil (doğru, çember, parabol vs.) üzerinde tanımlanmış ve sadece bu şekil üzerinde hareket edebilen (yarı sürüklenilebilen) noktayı sürükleme
Amaçlı Sürükleme	Geometrik bir yapıyı özel bir şekil elde etmek amacıyla belirli noktalarından sürükleme tekniği
Gizli Geometrik Yer Sürüklemesi	Geometrik bir yapıya ait özel bir noktayı, yapının belirli özelliklerini değiştirmeyecek biçimde görünmez bir geometrik yer üzerinde sürükleme tekniği
Geometrik Yeri İşaretleyerek Sürükleme	Gizli geometrik yer sürüklemesi sırasında keşfedilen geometrik yeri görünür kılma amacıyla geometrik bir yapıya ait özel bir noktayı iz ya da nokta bırakarak sürükleme tekniği
Bağımlı Sürükleme	Geometrik bir yapıya ait özel bir noktayı özel bir şekil (doğru, çember, parabol vs.) üzerinde hareket edecek biçimde sürükleme tekniği
Sürükleme Testi	Oluşturulan geometrik bir yapıyı belirli özelliklere sahip olup olmadığını test etmek amacıyla çeşitli noktalarından sürükleme

Arzarello vd. (2002) ele aldıkları sürükleme türleri çerçevesinde öğrencilerin düşünme süreçlerini analiz ederlerken, matematiksel görev olarak *bir kenarortay tarafından iki ikizkenar üçgene ayrılan üçgenlerin ortak özelliklerinin incelenmesi* üzerinde durmuşlardır. Bu bağlamda öğrencilerin DGY’de kenarortaylarından birini çizdikleri herhangi bir çeşitkenar üçgenin üzerinde sırasıyla uyguladıkları rastgele sürükleme, gizli geometrik yer sürüklemesi ve geometrik yeri işaretleyerek sürükleme sırasında algısal düşünme süreçlerinden matematiksel düşünme süreçlerine geçiş yaparak geri-çıkarma türündeki akıl yürütme biçimini gerçekleştirebildikleri belirlenmiştir. Bunun yanında öğrencilerin söz konusu geçiş sırasında ortaya koydukları varsayımları değerlendirirken bağımlı sürükleme ve sürükleme testini uyguladıkları ve bu sırada matematiksel düşünmeden algısal düşünme sürecine geçiş yaptıkları ortaya konmuştur. Benzer bir çalışmada Baccaglini-Frank (2010) da öğrencilerin DGY’deki geometrik yapıları –belirli bir özelliği koruyacak biçimde– sürüklediklerinde, söz konusu sürükleme işleminin ortaya çıkardığı deneysel sonuçların öğrencilerin zihinlerinde yeni bir geometrik fikirleri uyandırdığı ve geri-çıkarma türündeki akıl yürütme süreçlerini gerçekleştirdiklerini belirlemiştir. Yapılan çalışmaların sonuçları dikkate alındığında DGY’deki sürükleme türlerinin öğrencilerin geometrik yapılarla ilgili düşünsel süreçlerini ayrıntılı biçimde yönlendirdiği görülmektedir.

Bu çalışmada katılımcının ön deneyimleri doğrultusunda DGY olarak GeoGebra ele alınırken, yukarıda açıklanan kuramsal perspektifler ışığında araştırma sorusu şu şekilde ifade edilmektedir: *Bir matematik öğretmeni adayının GeoGebra'daki bir geometrik inşa problemi kapsamında çemberde kiriş ve teğetin merkez nokta ile ilişkisini keşfederken aldığı GeoGebra tabanlı yönlendirici destekler ve bu sırada gerçekleştirdiği akıl yürütme süreçleri nelerdir?* Bu bağlamda çalışmanın odağındaki akıl yürütme süreçlerinin araştırılmasında katılımcının geometrik kavramların bilinen ya da yeni keşfedilen ilişkileri üzerinden yaptığı çıkarımlar Peirce'un (1960) akıl yürütme türlerine ilişkin sınıflandırması ışığında incelenmiştir. Ayrıca katılımcının DGY'deki akıl yürütme sürecinde yönlendirici destek olarak yararlandığı sürüklenme işlemlerinin çözümlenmesinde Arzarello vd.'nin (2002) sürüklenme türlerine yönelik sınıflandırmasından yararlanılmıştır.

### Yöntem

Bu çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması deseni benimsenmiştir. Durum çalışması özel bir olgunun veya katılımcının kendi gerçek yaşam bağlamında ayrıntılı olarak incelenerek, neden ve nasıl sorularına cevap veren bir yöntemdir (Yin, 2018). Bu çalışmada, bir matematik öğretmeni adayının DGY'de gerçekleştirdiği akıl yürütme süreçleri ve yararlandığı DGY tabanlı yönlendirici destekler derinlemesine ele alınarak detaylı olarak incelenmiştir. Diğer bir deyişle, katılımcının DGY aracılığıyla akıl yürütme süreçlerini adım adım nasıl gerçekleştirdiğini detaylı ve 'bütünsel olarak' (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 77) ortaya çıkarmak amaçlanmış ve bu doğrultuda tekli durum çalışması yöntemi kullanılmıştır (Yin, 2018).

### Katılımcı Hakkında Bilgiler

Araştırmanın katılımcısı, Gonca (takma isim), Türkiye'nin İç Anadolu bölgesinde yer alan bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği programına kayıtlı bir dördüncü sınıf öğrencisidir. Katılımcının birinci sınıfta -içeriğinde Öklid ve Öklid-dışı geometrilere yönelik teorem ve ispatların yer aldığı- Geometri dersini CC harf notuyla ve üçüncü sınıfta -içeriğinde GeoGebra yardımıyla geometri ve cebir öğrenme alanlarına yönelik etkinlik tasarımlarının yer aldığı- Bilgisayar Destekli Matematik Öğretimi dersini (seçmeli meslek bilgisi dersi) BB harf notuyla tamamladığı bilinmektedir. Gonca'nın bu araştırmayı da içine alan kapsamlı bir proje çalışmasının önceki aşamaları ve proje öncesinde yürütülen farklı bir çalışma kapsamındaki görev tabanlı görüşmelere (task-based interview) katıldığı ve GeoGebra destekli geometrik inşa görevleri üzerinde çalıştığı bilinmektedir. Gonca'nın bu görevlerdeki işlemleri dikkate alındığında katılımcının GeoGebra'daki nokta ve doğru kavramına yönelik araçların (orta nokta veya merkez, doğru, ışın, doğru parçası, verilen uzunlukta doğru parçası) temel inşa araçlarının (dik doğru, orta dikme, paralel doğru, açıortay, teğet), çokgen kavramına yönelik bazı araçların (çokgen, düzgün çokgen), çember kavramına yönelik bazı araçların (merkez ve bir noktadan geçen çember, merkez ve yarıçapla çember), dönüşüm geometrisine yönelik bazı araçların (doğruya yansıt, noktada yansıt) ve bazı ölçme araçlarının (açı, verilen ölçüde açı, uzaklık veya uzunluk) kullanımına yönelik bilgi sahibi olduğu bilinmektedir. Bunun yanında daha önce yürütülen görevlerin analizi sonucunda katılımcının süreç içinde DGY'de figür ve çizim arasındaki farkı "değişmez özellik" fikri üzerinden kavramış olduğu ve bu bağlamda bir figür

inşa etme sürecinin değerlendirilmesinde sürüklenme testinin ne ifade ettiğini anladığı görülmüştür.

Gonca'nın daha önce yürütülen bir görev-tabanlı görüşme kapsamında verilen bir doğruya üzerindeki bir noktada dik doğru inşa etme problemini farklı çözüm yöntemleriyle tamamlaması istenmiştir. Gonca'nın farklı GeoGebra araçlarını kullandığı örnek çözümleri (1) doğru üzerinde verilmiş olan noktaya göre simetrik iki yeni nokta oluşturma ve bu noktaları merkez alan eş çemberlerin kesişim noktalarından geçen doğruyu oluşturma, (2) problemdeki doğru üzerinde verilen noktadan geçen ve merkezi de doğru üzerinde belirlenen bir çemberin – verilen noktadan geçen- teğetini oluşturma, (3) problemdeki doğru üzerinde verilen noktayı merkez alan çember oluşturma ve çemberde çapa paralel bir kiriş oluşturarak orta dikmesini belirleme biçiminde ortaya çıkmıştır. Kiriş temelli çözüm süreci içerisinde Gonca'nın hangi matematiksel gerekçeleri temel aldığı sorulduğunda, katılımcının GeoGebra'daki deneysel sonuçlar yardımıyla bir çemberdeki paralel kirişlerin orta dikmelerini ilişkilendirdiği gözlenmiştir. Buna karşılık katılımcının kiriş – çember ilişkisine yönelik bilgisi üzerinde daha kapsamlı bir sorgulama yapıldığında Gonca'nın çemberde herhangi bir kiriş ile merkez nokta ilişkisine yönelik akıl yürütemediği ve açıklama yapamadığı görülmüştür. Bu nedenle Gonca'nın çemberde kiriş-merkez nokta ilişkisini daha derinlemesine inceleyebileceği görevlerin hazırlanmasına karar verilmiştir. Buradan hareketle çemberde kiriş – merkez nokta ilişkisine yönelik DGY destekli akıl yürütme ve keşif sürecinin incelenmesi çalışmanın çıkış noktasını oluştururken, araştırma süreci içerisinde Gonca'nın üçgen – iç teğet çemberin merkezi ilişkisine yönelik de hatalı akıl yürütmeler gerçekleştirdiği görülmüş ve çalışmanın sonraki aşamalarında bu kavramlara ilişkin akıl yürütme süreçlerinin de ele alınmasına karar verilmiştir.

Devam eden proje çalışmasının katılımcısı olması dolayısıyla Gonca'nın ne tür ön bilgilere sahip olduğu araştırmacılarca bilinirken; aynı zamanda Gonca'nın özel olarak çemberde kiriş ve teğet kavramlarına yönelik akıl yürütme ve keşif süreçlerini destekleyecek uygun görevlere ihtiyaç duyması ve DGY'ye yönelik ön deneyimlerinden çıkan sonuçların söz konusu teknolojinin Gonca için uygun bir destek aracı olabileceğine işaret etmesi onun 'amaçlı örnekleme tekniği' (Bogdan & Biklen, 1998, s. 65) gereği bu araştırmanın katılımcısı olarak belirlenmesini sağlamıştır.

### **Görev-Tabanlı Görüşme ve Matematiksel Görev**

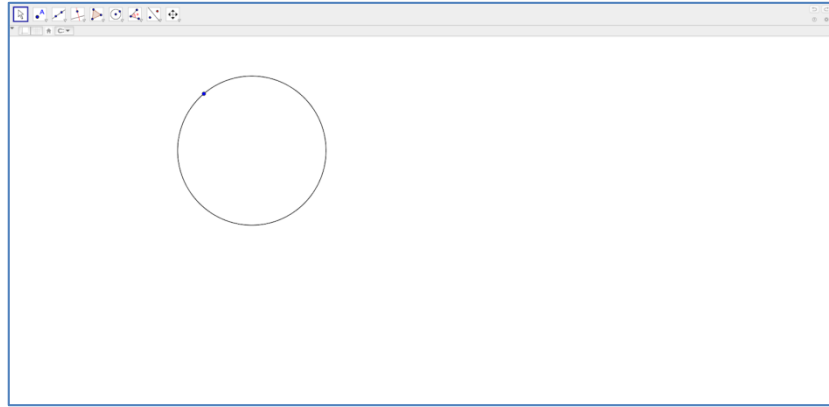
Araştırmada, amaca paralel olarak katılımcının nasıl akıl yürüttüğünü detaylı incelemek için farklı aşamaları içeren bir görev-tabanlı görüşme (task-based interview) (Maher & Sigley, 2014) gerçekleştirilmiştir. Görev-tabanlı görüşme, özenle tasarlanmış bir görev aracılığı ile, katılımcıların var olan bilgilerini (ya da bilgi eksikliklerini), 'matematiksel fikirlere dair kullandıkları gösterimleri, bilgilerindeki gelişimi ve muhakeme süreçlerini' (Maher & Sigley, 2014, s. 579) ortaya çıkarmak için matematik eğitimi araştırmalarında kullanılmaktadır. Dolayısıyla, tasarlanacak görevin, araştırmanın problem ve alt problemleri ile sıkı ilişkili olması gerekmekte ve katılımcıların ön bilgilerinin ve tecrübelerinin dikkate alınması gerekmektedir.

Bu çalışma kapsamındaki matematiksel görevlerde katılımcının DGY'den yararlanması planlanırken, yazılım olarak ücretsiz, Türkçe dil seçeneğine sahip ve çevrimdışı kullanım imkânı veren GeoGebra programı seçilmiştir. Buradan hareketle Gonca'ya sunulan görevde bir çemberin merkez noktasının GeoGebra araçları yardımıyla nasıl oluşturulacağı sorulmuştur



(Şekil 2). Bu görev kapsamında Gonca'ya başlangıç aşamasında GeoGebra'da istediği araçlar ve kavramlar üzerinden çözüm stratejisi geliştirilebileceği söylenmiştir. Böylece Gonca'nın ilk aşamada hangi ön bilgileri üzerinde akıl yürüttüğünün, ne tür çözüm yolları geliştirdiğinin ve yönlendirici desteğe ihtiyaç duyup duymadığının görülmesi amaçlanmıştır. Sonraki aşamada ise Gonca'nın GeoGebra'da alternatif stratejiler üzerinde düşünmesi istenmiştir. Böylece Gonca'nın akıl yürütme sürecine farklı geometrik ilişkileri dâhil etmesi ve adım adım çemberde kiriş – merkez nokta ilişkisine odaklanacağı stratejiler üzerinde akıl yürütmesi hedeflenmiştir. Üçüncü aşamada ise Gonca'nın önceki keşiflerinin sonraki akıl yürütme süreçlerine nasıl yön verdiğini görmek amacıyla katılımcının yine farklı stratejiler üzerinde düşünmesi sağlanmıştır. Üçüncü aşama kapsamında katılımcının üçgen – iç teğet çemberin merkezi ilişkisine yönelik akıl yürütme sürecinin hatalı çıkarımlar içermesi sonucunda görüşmenin dördüncü ve beşinci aşamaları Gonca'nın söz konusu bağlamdaki akıl yürütme süreçlerini derinleştirmeyi amaçlamıştır.

**Görev:** Verilen çemberin merkezini inşa ediniz?



Şekil 2. Görevin GeoGebra arayüzü

Bu araştırma sırasında, Gonca'nın çemberde teğetin merkez nokta ile ilişkisine yönelik bazı temel bilgilere sahip olmasına karşılık, bir çemberde teğetlerin oluşturduğu üçgenin merkez nokta ile ilişkisine yönelik akıl yürütme süreçlerinde eksiklik olduğu gözlenmiştir. Bu nedenle görev tabanlı görüşmede Gonca'nın teğet ile ilgili keşiflerine de ayrı bir yer ayrılmıştır. Görev tabanlı görüşme sürecinde görüşmecinin rolü, katılımcının akıl yürütme sürecine yönelik GeoGebra tabanlı yönlendirici destek sağlamaktır.

### Verilerin Toplanması ve Analizi

Bir fakültede özel bir toplantı odasında yaklaşık iki saat sürede yürütülen görev tabanlı görüşme sürecinde bir katılımcı ve bu makalenin yazarları olan iki araştırmacı yer almıştır. Araştırmacılardan biri süreçte görüşmeci, diğer araştırmacı ise gözlemci olarak yer almıştır. Görev tabanlı görüşme sırasında video-kamera katılımcının çalışma ortamını görecektir şekilde yerleştirilmiş ve katılımcının GeoGebra ortamında görevleri tamamlamaya çalışırken kullandığı teknikleri ve takip ettiği adımları ortaya çıkarması bakımından, ekran kaydedici yazılımı da kullanılmıştır. Ele alınan durumu derinlemesine yansıtması bakımından, katılımcının sözel ve

ekrandaki işlemlerini yansıtan görsel veriler üzerinden veri çeşitlenmesine gidilmiştir. Araştırmacılar görüşmelerden elde edilen video kayıtlarının ve ekran kaydedici verilerinin ayrıntılı dökümlerini yapmışlar ve dökümler üzerinde birbirinden bağımsız olarak çalışarak benimsenen kavramsal çerçeveler ışığında kod ve temalar belirlemişlerdir. Araştırmacılar bir araya gelerek bireysel olarak elde ettikleri kod, tema ve üst temaları karşılaştırmışlar ve farklı durumlar üzerinde fikir birliğine vararak analiz sürecini tamamlamışlardır. Bu durum, çalışmanın geçerlik ve güvenilirliğini desteklemektedir.

Bu kod ve temaların belirlenmesinde ilk olarak katılımcının GeoGebra’da ortaya çıkan akıl yürütme süreçlerine odaklanılmış ve analiz yöntemi olarak Peirce’ün (1960) akıl yürütme türlerinin referans alındığı betimsel analiz gerçekleştirilmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu analiz sonucunda, tümdengelsel, tümevarımsal ve geri çıkarım türündeki akıl yürütmeler belirlenmiştir. İkinci olarak, katılımcının DGY’de gerçekleştirdiği akıl yürütme biçimlerine destek sağlayan sürüklenme türlerinin analizinde Tablo 1’de yer alan Arzarello vd.’nin (2002) kavramsal çerçevesi temel alınarak betimsel analiz gerçekleştirilmiştir. Bu anlamda katılımcının akıl yürütme süreçlerinde kullandığı sürüklenme türleri ve nasıl faydalandığı ortaya çıkarılmıştır. Üçüncü olarak, katılımcıdaki söz konusu akıl yürütme süreçlerinin ortaya çıkmasında rol alan yönlendirici desteklerin sınıflandırılması için içerik analizi yapılmış (Yıldırım ve Şimşek, 2005) ve Tablo 2’de yer alan bağlama özgü üç tema belirlenmiştir.

**Tablo 2.**

*Yapılan Çalışma Bağlamındaki DGY Tabanlı Yönlendirici Destekler*

Yönlendirici Destek Türü	Gerektiği Durumlar	Örnek Görüşmeci İfadesi
DGY’nin görüşmeciden bağımsız olarak sağladığı yönlendirici destek	(Görüşmecinin kontrolünde değildir)	(Görüşmecinin kontrolünde değildir)
Görüşmecinin işlemsel türdeki yönlendirici desteği	-Figürlerin görüntülerine dayalı hatalı algısal çıkarımlar -Hatalı oluşturulan figür	“Şekli sürükle bakalım”
Görüşmecinin matematiksel türdeki yönlendirici desteği	-Eksik ya da hatalı ilişkilendirmeler üzerinden akıl yürütme	“Teğet ile ilgili ne biliyordun?” “Deltoit olduğunu nasıl söylüyorsun?”

Tablo 2 ışığında Gonca’nın akıl yürütme sürecine yön vermek amacıyla -görüşmecinin kontrolü olmaksızın- GeoGebra’daki çeşitli işlemlerden edindiği görsel dönütler DGY tabanlı yönlendirici desteklerin birinci boyutunu oluşturmaktadır. Örnek olarak katılımcının kendi kararıyla çeşitli sürüklenme türlerini kullanması ve işlemlerinden aldığı görsel dönütleri yorumlaması bu türdeki yönlendirici desteklere bir örnektir. Bu destek türü “DGY’nin görüşmeciden bağımsız olarak sağladığı yönlendirici destek” olarak ele alınmıştır. Diğer yandan katılımcının akıl yürütme sürecinin çıkmaza girdiği çeşitli durumlarda görüşmecinin DGY’deki figürler üzerinden sağladığı işlemsel ve matematiksel türdeki yönlendirici destekler bu bağlamdaki sınıflandırmanın diğer boyutlarını oluşturmaktadır. Örnek olarak görüşmeci Gonca’nın GeoGebra’da incelediği bir geometrik figürün görüntüsüne dayalı olarak matematiksel özellikleriyle ilgili hatalı algısal çıkarımlar yapması durumunda katılımcının amaçlı sürüklenme yardımıyla figürün belirli özelliklerini değiştirmesini ve yeniden düşünmesini istemiştir. Bir başka örnekte, Gonca’nın hatalı geometrik ilişkilendirmeler

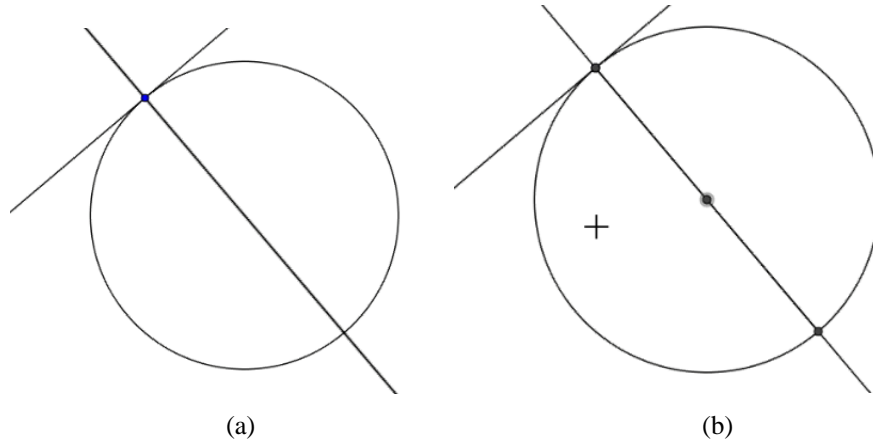
devamında çemberin merkez noktasını inşa ettiğini düşündüğü durumda görüşmeci katılımcının sürüklenme testini uygulayarak noktanın yerinin değişip değişmediğini gözlemlemesini istemiştir. Bu destekler bu çalışma bağlamında görüşmecinin işlemsel türdeki yönlendirici desteği olarak ele alınmıştır. Bunun yanında görüşmeci, eksik/hatalı ilişkilendirmelerin katılımcının akıl yürütme sürecini çıkmaza götürdüğü durumlarda Gonca'nın –doğru olduğu bilinen– ön bilgileri üzerinden düşünmesini ya da farklı geometrik ilişkilere odaklanmasını sağlayacak sorular yöneltmiştir. Bu destekler de bu çalışma bağlamında matematiksel yönlendirici destekler olarak ele alınmıştır.

Temel alınan kavramsal çerçeveler ışığında yapılan analiz sonuçları Bulgular başlığında katılımcı – görüşmeci diyaloglarından yapılan alıntılar ve bilgisayardaki ekran kaydediciden alınan görsellerle ilişkilendirilerek sunulmuştur. Bunun yanında okuyucu için daha anlamlı hale gelmesi amacıyla bulguların beş alt başlıkta detaylandırılmasına karar verilmiştir.

## Bulgular

### Teğet ve Dik Doğru Temelli Merkez Nokta İnşası: Tümdengelimli Akıl Yürütme

Katılımcının çemberin merkez noktasını inşa etmeye yönelik görevin birinci aşamasında teğet kavramının özelliklerinden yararlanabileceğini düşünerek çemberin üzerinde bir nokta işaretlemiş ve “teğet” aracından yararlanarak bu noktadan geçen teğeti oluşturmuştur.



Şekil 3. Teğet ve dik doğru yardımıyla çemberin merkez noktasını inşa etme

Daha sonra Gonca “dik doğru” aracını seçerek teğetin çembere değme noktasından geçen ve teğete dik olan doğruyu oluşturmuş (Şekil 3a), ardından oluşturulan doğrunun çemberin merkez noktasından geçtiğini ifade etmiştir. Bu ifadenin ardından katılımcı oluşturulan dik doğrunun çemberin içinde kalan kısmının (kirişin) çap olduğunu belirterek, söz konusu kirişin orta noktasını “orta nokta veya merkez” aracıyla oluşturmuştur (Şekil 3b). İşlem sürecinde Gonca aşağıdaki açıklamaları yapmıştır:

Görüşmeci: Yine araçları verdik sana. Bakabilirsin, inceleyebilirsin.

Gonca: (Araç kutusunu incelemeye başlar) Mesela bunu düşünelim (teğet aracını gösterir). (...) Önce noktayı sonra çemberi işaretleyeceğim. Bunu (nokta) sonra bunu (çemberi). Olmadı. Noktadan teğet, hah! Tamam, bu

noktadan teğet (çembere teğet oluşturur). Mesela bir şey olsa, merkezi eğer belli olsa o merkezden çizilen doğru parçası dik deriz ve bu yarıçapı zaten gösterir bize. Bu acaba hani buna dik bir doğru çizsek bu teğeti verir mi şey yarıçapı verir mi bize acaba? Dik doğru, yani bu doğruya dik bir doğru. Şuradan bu çapı verdi bize (teğete dik doğru çizdi). Bunu doğru parçasına çevirip orta noktasını bulabilirim artık (orta nokta veya merkez aracını kullanır ve merkez noktayı oluşturur).

Bu süreçte Gonca'nın çemberde teğetin özelliklerine yönelik sahip olduğu ön bilgi ortaya çıkmıştır. Gonca teğet kavramına yönelik bilgileri üzerinden tümdengelimli akıl yürütmeyi gerçekleştirerek inşa sürecini tamamlamış ve bu süreçte yönlendirici desteğe ihtiyaç duymamıştır.

### **Kiriş ve Orta Dikmeye İlişkin Keşif Ve Genelleme: Tümevarımsal Akıl Yürütme**

Gonca teğet, dik doğru ve orta nokta veya merkez araçları yardımıyla merkez noktayı oluşturduktan sonra "orta nokta veya merkez" aracının farklı bir işlevi olup olmadığını merak etmiş, ardından bu aracı seçip çembere tıkladığında doğrudan merkez noktayı oluşturduğunu keşfetmiştir. Bu nedenle ikinci aşamada çemberin merkezini doğrudan meydana getiren "orta nokta veya merkez" aracı araç çubuğundan çıkarılmış ve Gonca'nın giriş odaklı alternatif stratejiler üzerinde düşünmesi beklenmiştir.

İkinci aşamada Gonca çemberin çapını oluşturabileceği farklı stratejiler üzerinde düşünmeye başlamıştır. Katılımcı yaptığı açıklamalarda çemberde çapı oluşturması durumunda "orta dikme" aracı yardımıyla merkez noktayı oluşturabileceğini ifade etmiştir:

Görüşmeci: Bakalım aklına başka bir şey gelecek mi? Sadece 'orta nokta veya merkez' aracını çıkarttım.

Gonca: (Araçları inceler) Bir şey düşündüm mesela. Çap doğrusuyla ilgili bir şey olsa, şurasıyla şurası (çemberin üzerinde karşılıklı iki noktayı gösterir) atıyorum ama onun çap ya da giriş olduğu belli değil. Mesela onun orta dikmesini bulsak yine bir yarıçapı belli olmuş olur, merkezi belirlenmiş olur. Orta dikmeden yararlanıp gelir aslında başka bir şey. Bu nokta hangi nokta direk karşısı... (Çapı oluşturabileceği iki nokta üzerinde düşünür) Simetriyi kullanalım. Şunu deneyeceğim bu aracı hiç bilmiyorum (çemberde yansıt aracı). Önce nokta, sonra çember. Olmadı. Bir şey daha mı olması gerek acaba?

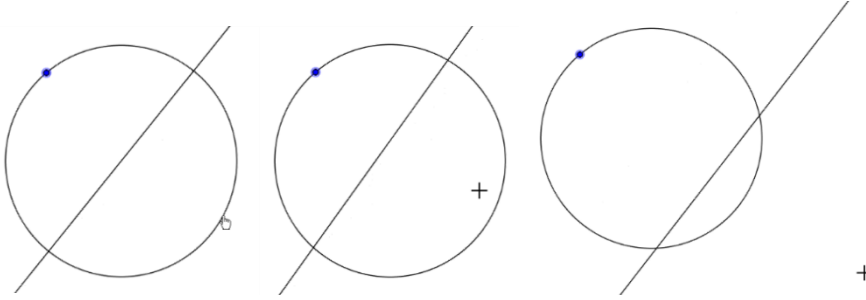
Bu süreçte katılımcı çember üzerinde herhangi bir nokta işaretlemiş ve çapı oluşturmasını sağlayacak ikinci noktayı belirlemek amacıyla GeoGebra'nın dönüşüm geometrisi araçlarından nasıl yararlanabileceği üzerinde düşünmüştür. Gonca GeoGebra'da işlevini bilmediği "çemberde yansıt" aracıyla bir süre deneme-yanılma yaptıktan sonra dönüşüm geometrisi araçlarını incelemekten vazgeçmiştir.

Sonraki adımda katılımcı -bir önceki açıklamasında söz ettiği- "orta dikme" aracını seçmiştir. Gonca "orta dikme" aracını seçtikten sonra çember üzerinde bir noktaya tıklamış, ardından ikinci noktayı nerede işaretleyeceği üzerinde düşünmüştür. Bu esnada Gonca ekranda ikinci noktayı işaretlemek üzere farenin işaretçisini serbestçe hareket ettirdiğinde bu harekete bağlı olarak ekranda pozisyonu değişen bir doğrunun (orta dikmenin) meydana geldiğini görmüştür. Bu sırada Gonca'nın kendi kendisine sessizce (mırıldanarak) yaptığı açıklamalarda aşağıdaki cümle duyulmuştur:

Gonca: Ama bu çapın... İşte... Kiriş de olabilir yani (Ortaya çıkan doğrunun çap mı yoksa herhangi bir giriş mi oluşturduğu üzerinde düşünür). Ne olur ki? (İşaretçiyi çemberin dış bölgesine doğru sürükler).

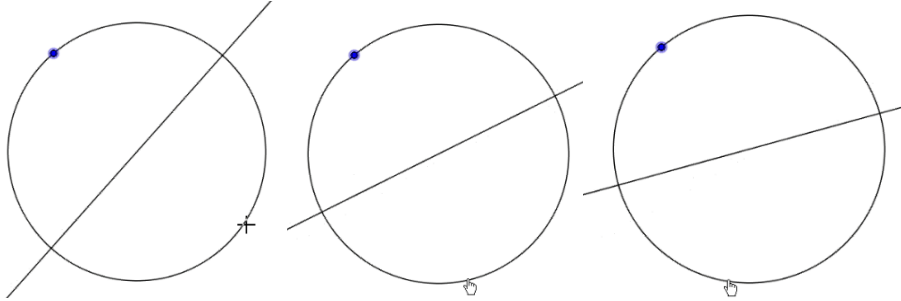
Gonca'nın ikinci noktayı oluşturmak için işaretçiyi çemberin iç ve dış bölgesinde rastgele sürüklediğinde ekranda pozisyonu değişen doğrunun (orta dikmenin) özelliği üzerinde

düşündüğü ve bu doğrunun çapı oluşturup oluşturmayacağı ile ilgili sorgulama sürecine girdiği anlaşılmıştır. Katılımcı ele alınan doğrunun çemberin iç bölgesinde oluşturduğu kirişin görüntüsü dikkatini çekerken, sonraki kelimelerinde ise bu kirişin herhangi bir kiriş olabileceğini düşündüğü fark edilmiştir. Bu esnada Gonca'nın *rastgele sürüklenme* yaptığı görülmüştür (Şekil 4).



Şekil 4. Orta dikme aracının kullanımı sırasında ikinci noktaya ilişkin rastgele sürüklenme süreci

Katılımcı bu doğrunun bağımlı olduğu işaretçiyi çemberin üzerine getirdiğinde orta dikmenin - kendi deyişiyile- “çemberin ortasından geçtiğini” ifade ederken, işaretçiyi çember üzerinde sürükledikçe bu özelliğin korunup korunmadığını incelemiştir (Şekil 5). Bu aşamada Gonca'nın *bağımlı sürüklenme* yaptığı görülmüştür.

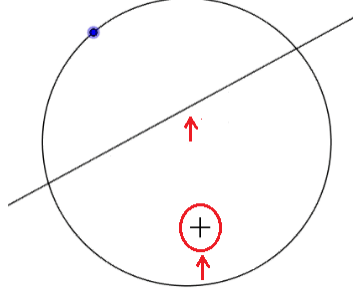


Şekil 5. Bağımlı sürüklenme yardımıyla kirişin orta dikmesine yönelik inceleme

Şekil 4'te görünen bağımlı sürüklenme sırasında Gonca aşağıdaki açıklamaları yapmıştır:

Gonca: Aslında şöyle bir şey var. Mesela çemberin üzerinde şu an olduğum için (oluşan orta dikme) tam ortasını kesiyor çemberin. Mesela çemberin iç tarafına geldiğimde ortasını kesmemeye başlıyor kiriş.

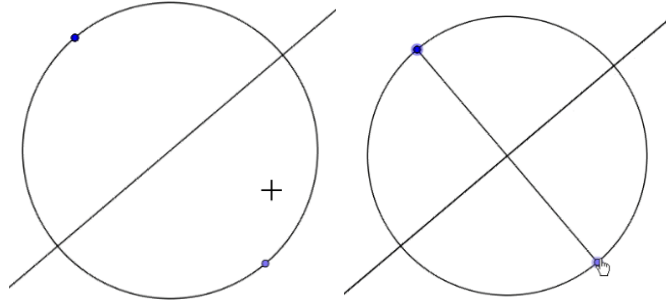
Gonca açıklamaları sırasında orta dikmenin bağımlı olduğu işaretçiyi amaçlı olarak çemberin iç bölgesine doğru sürüklemiştir (Şekil 6). Bu adımda Gonca *amaçlı sürüklenme* yapmıştır.



**Şekil 6.** Amaçlı sürükleme ile kirişin orta dikmesine yönelik inceleme

Gonca inceleme sırasında açıklamalarına aşağıdaki biçimde devam etmiştir:

Gonca: Mesela bir tane nokta belirlesek (çemberin üzerinde) yani tahmini bir nokta bu gerçi. Yani yine orta dikme aracı... (Çemberin üzerinde işaretlediği iki nokta üzerinde orta dikme aracını kullanır). Yani bu çemberin üzerindeki bir noktadan şey yapınca bu tam ortasını gösterdi (oluşturduğu doğru parçası ile orta dikmenin kesişim noktasını gösterir) (Şekil 7).

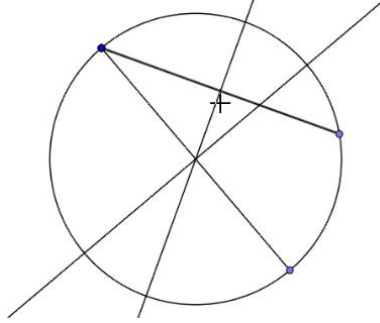


**Şekil 7.** Çemberde kiriş ve orta dikme oluşumu

Bu esnada çember üzerinde seçilen noktalar aracılığıyla Gonca'nın –görüşmeci ve gözlemciye göre çemberin çapı gibi görünen- bir kirişin uç noktalarını ve bu kirişin orta dikmesini oluşturduğu gözlenmiştir. Bu nedenle görüşmeci Gonca'ya aşağıdaki soruyu sormuştur:

Görüşmeci: Bu doğru parçası nedir peki?

Gonca: O doğru parçası da herhangi bir kiriş aslında yani çünkü belli bir, herhangi bir nokta belirledim (figür oluşturmadığının; onun yerine herhangi bir çizim yaptığının farkındadır). Bilemem yani çap kirişine denk geleceğini. Ama mesela şöyle bir nokta (farklı bir kiriş oluşturmak için çember üzerinde farklı bir noktayı gösterir) belirleseydik atıyorum şurada bir nokta belirleseydik bunun orta dikmesi daha farklı olacaktı. Nerede? Orta dikmesi şöyle bir şey olacaktı (orta dikme aracını farklı bir kiriş üzerinde kullanır). Mesela... (Duraksar) Bu da aynı yerde kesişiyor (ikinci kirişin orta dikmesinin birinci kirişin orta dikmesiyle kesiştiği noktadan geçtiğini görür) (Şekil 8).



**Şekil 8.** Farklı bir kiriş ve orta dikme oluşumu

Gonca ilk yaptığı açıklamalarda çember üzerinde oluşturacağı farklı bir kirişin orta dikmesinin çap olamayacağını iddia ederken, Şekil 6’da görünen işlemi gerçekleştirdikten sonra ikinci orta dikmenin daha önce oluşturduğu kiriş ve orta dikmenin kesişim noktasından geçtiğini fark etmiştir. Bu aşamada Gonca’nın ilk kirişi çapa oldukça yakın biçimde çizdiği anlaşılmıştır. Bunun ardından katılımcı üçüncü bir kiriş oluşturarak onun da orta dikmesinin aynı noktadan geçtiğini gözlemlemiştir. Bu keşiflerin ardından Gonca yaptığı açıklamalarda çemberde tüm kirişlerin orta dikmelerinin çemberin merkez noktasından geçtiğine yönelik tümevarımsal çıkarım yapmıştır:

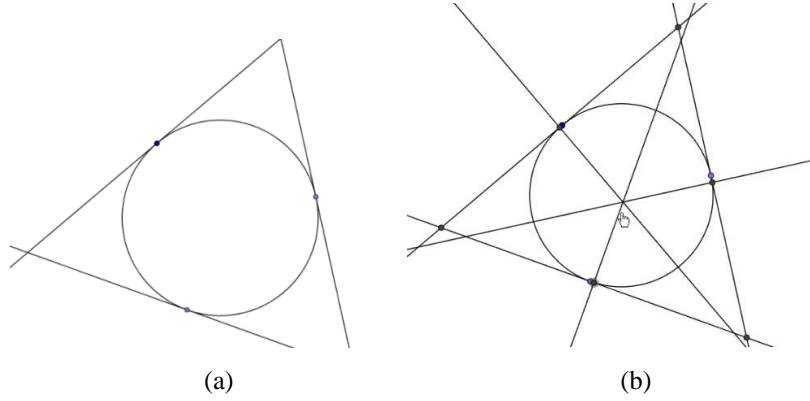
Görüşmeci: Peki bir şey söyleyebilecek misin buradan bize?

Gonca: Her şekilde orta noktası olmuş oluyor yani. İsterse şu noktadan koyalım bir daha deneyeyim mesela. Herhangi bir nokta. Şuradan noktayı koydum. Yine noktayı tanımladım. Mesela yine o da aynı şekilde orta dikmeyi buradan da tanımladığımda yine aynı noktada kesiyor. Yani çünkü zaten buradan doğru parçası oluşturduğumda yine kiriş dik olmuş oluyor. Aslında bu çapı yani yarıçapı tanımlamış oluyor. Şu nokta da kesişim noktasının merkezi. Kesiştir diyeyim. Bu nokta merkezdir (GeoGebra’daki ‘kesiştir’ aracıyla orta dikmelerin kesişim noktasını oluşturur).

Gonca’nın tümevarımsal çıkarıma kadar yaptığı incelemelerde dinamik geometri yazılımının sürüklenme fonksiyonu ve “orta dikme” aracının özellikleri yardımıyla düşüncelerini yapılandırdığı gözlenmiştir. Bu süreç içinde DGY’nin sürüklenme fonksiyonunun ve orta dikme aracının sağladığı görsel dönütlerin görüşmeciden bağımsız olarak Gonca için yönlendirici destekler oluşturduğu görülmüştür.

### **İç Teğet Çember Odaklı Çıkarımlar: Algısal Hatalar ve Tümdengelimli Akıl Yürütme**

Üçüncü aşamada katılımcıya yeniden çemberin merkez noktasını oluşturmaya yönelik farklı bir strateji kullanıp kullanamayacağı sorulmuş ve bu sefer GeoGebra’nın tüm araçları kendisine sunulmuştur. Bu noktada Gonca bir süre düşündükten sonra “teğet” aracı yardımıyla çembere teğet olan üç doğru oluşturmuş (Şekil 9a) ve bu teğetlerin meydana getirdiği üçgen üzerinde düşünmeye başlamıştır. Katılımcı bu süreçte ilk olarak oluşan yeni üçgende de kenarların orta dikmelerinin çemberin (iç teğet çemberin) merkez noktasında kesişeceklerini öne sürmüştür. Daha sonra Gonca üçgenin kenarlarının orta dikmelerini oluşturmuş (Şekil 9b) ve yaptığı gözlemin ardından bu orta dikmelerin kenarların çembere değme noktalarından geçmediklerini ifade etmiştir. Bu noktada Gonca’nın üçgenin kenarlarına dik olan ve çembere değme noktalarından geçen doğruları orta dikme olarak düşündüğü anlaşılmıştır.



**Şekil 9.** (a) Teğet aracıyla üçgen oluşturma, (b) Kenar orta dikmelerin oluşturulması

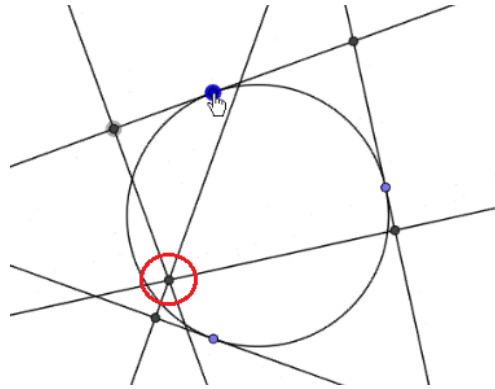
Kenar orta dikmelerin oluşturulmasının ardından Gonca ilk olarak algısal gerekçelerle kenar orta dikmelerin kesişim noktasının çemberin merkezini verdiğini belirtirken, görüşmeci Gonca'nın üçgeni sürüklemesini istemiştir. Bu adımda ortaya çıkan söylem aşağıda görülmektedir:

Gonca: Teğetle merkez... Yani diklik olacak şurada. Merkezden çizilen doğru parçası dik oluyor yani teğete. Ondan dolayı şurası merkez oluyor.

Görüşmeci: Sürükle bakalım bir.

Gonca: (Üçgeni sürükler ve kenar orta dikmelerin kesişim noktalarının değiştiğini görür) Her zaman merkezi olmuyor yani, onu değiştirdi çünkü.

Gonca üçgeni sürüklediğinde (Şekil 10) söz konusu kesişim noktasının çemberin merkez noktası olmadığını ifade etmiştir. Bu aşamada Gonca sürükleme testinin kullanılması konusunda görüşmeciden işlemsel türde yönlendirici destek almıştır ve şekil üzerinde yeniden düşünmeye başlamıştır.



**Şekil 10.** Sürükleme testi yardımıyla kenar orta dikmelerin kesişim noktasını yeniden inceleme

Gonca'nın görev tabanlı görüşmenin birinci aşamasındaki teğet ön bilgisi dikkate alınarak katılımcıya ön bilgileri üzerinde düşünmesini sağlayacak sorular yöneltilmiştir:

Görüşmeci: Şimdi teğetle ilgili ne biliyordun?



Gonca: Aslında az önce yaptığım şeyin aynısı. İlk yaptığımda teğete dik bir doğru çizdim, dik doğru dedim. Dik doğru aracıyla ondan sonra teğete dik olan doğru çap kirişini verir bana dedim. Çünkü teğete dikse çapın üzerinden geçer o doğru. Başka kirişten geçmez yani.

Görüşmeci: Bunun (orta dikmelerin kesiştikleri noktayı gösterir) merkez nokta olduğunu nasıl söylüyorsun?

Gonca: Orta nokta, orta dikmeden yola çıkarak...

Görüşmeci: Niye orta dikme?

Gonca: (Düşünür) Dikme olması gerekiyor aslında. Yani tek ortada olması önemli değil. Yani teğet olsa yeterli, teğet olsa dikliği verecek zaten bana. Burada yanlış bir çıkarım yaptım. Dikme olması yani aslında orta dikmeyi kesinliğe bağlamadı yani. Aslında orta dikme olmasının bir önemi yok çünkü zaten teğette diklikten bahsetmiştik. Yani teğet olmasının özelliği bu.

Bu açıklamaların ardından katılımcı söz konusu üçgenin, eşkenar üçgen olması durumunda kenarların orta dikmelerinin çemberin merkez noktasında kesişeceklerini ifade etmiştir:

Görüşmeci: Peki niye başta sadece orta dikme demiştin?

Gonca: Az önceki şeyden dolayı biraz, etkilendim sanırım (görüşmenin bir önceki aşamasındaki incelediği kiriş-orta dikme ilişkisinden bahsettiği anlaşılır). Ama mesela aynı üçgende eşkenar üçgen olsa bu sefer hem orta dikme de hem normal dikme de aynı olur.

Görüşmeci: Neden?

Gonca: Çünkü ortadır yani. Eşkenar olduğu için. Dikmesi ve orta dikmesi çakışır yani.

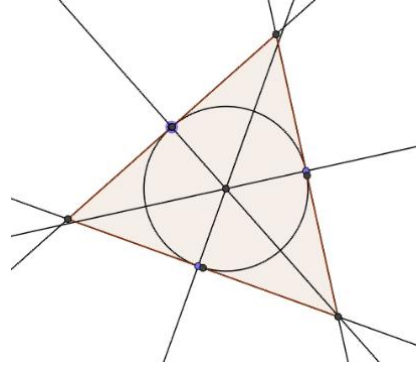
Bu bağlamda Gonca'nın çözüm sürecinin başında figürü eşkenar üçgen görünümüne yakın biçimde oluşturduğu, böylece eşkenar üçgenin özelliklerini dikkate aldığı ve bu durumun katılımcının algıya dayalı çıkarımlarını etkilemiş olabileceği görülmüştür. Ayrıca Gonca'nın bu aşama kapsamında kiriş ve teğet kavramlarının özelliklerini ayırt etmede ve hatalı algısal çıkarımlarını değerlendirmede görüşmecinin hem matematiksel hem de işlemsel türde yönlendirici desteğine ihtiyaç duyduğu görülmüştür. Bu yönlendirici desteklerin ardından Gonca üçgen – iç teğet çember ilişkisi kapsamında birinci aşamada temel aldığı teğet – çember ilişkisine dair bilgisini yeni karşılaştığı bağlam içerisinde ele almıştır. Katılımcı üçgende iç teğet çemberin merkezini oluşturmak için teğet bilgisine dayalı tündengelimli akıl yürütme süreci içerisinde üçgeninin kenarlarına -iç teğet çembere değdiği noktalarda- dik olan doğruları oluşturmuş ve doğruların kesişim noktasını işaretlemiştir.

### **Deltoide Yönelik Çıkarım: Geri-çıkarm (abduction)**

Dördüncü aşamada görüşmeci katılımcıya çemberin teğetleri yardımıyla oluşturduğu üçgenin diğer özelliklerinden yararlanarak çemberin merkez noktasını oluşturmaya yönelik farklı bir stratejinin geliştirilip geliştirilemeyeceği sormuştur. Bunun üzerine Gonca'nın bir süre üçgeni sürükleyerek çeşitli üçgenler üzerinde düşündüğü, ardından şekli eşkenar üçgen görünümüne sahip olacak biçimde sürükleyerek yeni şekil üzerinde incelemesini sürdürdüğü görülmüştür. Gonca'nın bu adımda eşkenar üçgen şemasından yararlanmak amacıyla figür üzerinde *amaçlı sürükleme* yaptığı gözlenmiştir.

Bunun ardından görüşmeci bir önceki aşamanın sonunda üçgenin kenarlarına dik olarak oluşturulan doğruların (bu doğrular kenarların iç teğet çembere değdiği noktalardan geçmektedirler) üçgen içerisinde ne tür çokgenler oluşturduğunu sormuştur (Şekil 11). Gonca ilk

önce bu çokgenlerden birinin deltoit olduğunu belirtirken, ardından üzerinde çalışılan üçgenin eşkenar üçgen olması durumunda söz konusu dörtgenin deltoit olacağını açıklamıştır. Gonca bu açıklamasını eşkenar üçgen görünümüne yakın bir figür üzerinden yapmıştır. Gonca bu düşüncesini desteklemek için söz konusu dörtgene ait bir açığı oluşturmuş ve açığı dörtgenin diğer köşe noktasından geçtiğini göstermiştir. Katılımcı deltoitte karşılıklı iki açının açığılarının çakışık olduğunu belirtirken, incelediği dörtgende de bu özelliğin bulunabileceğinden yola çıkmış ve söz konusu dörtgenin deltoit olduğuna yönelik geri-çıkarm (abduction) yapmıştır. Bu esnada katılımcının akıl yürütme sürecinde açığı aracının sağladığı dönüştürme yararı ve bu bağlamda görüşmeciden bağımsız olarak DGY'den yönlendirici destek aldığı görülmüştür.



**Şekil 11.** Eşkenar üçgen görünümüne yakın bir figür üzerinde yapılan incelemeler

Geri-çıkarm süreci kapsamında Gonca aşağıdaki açıklamaları yapmıştır:

Görüşmeci: Bu üçgenin içerisinde şu an bazı özel çokgenler oluşmuş olabilir mi?

Gonca: Deltoit oluşuyor.

Görüşmeci: Deltoit olduğunu nasıl söylüyorsun?

Gonca: Deltoit ama açığı varsa oluşur yine ya da işte düzgün olmayan dörtgen var şurada mesela.

Görüşmeci: Deltoit nasıl ne zaman oluşur dedin?

Gonca: Açığı iken.

Görüşmeci: Açığı iken?

Gonca: Mesela şuradaki deltoitten bahsediyorum. Yani şurada açığı varken. Açıklar arasında (Karşılıklı iki açının açığılarının çakışması özelliğinden bahsedilmektedir). Yani eşkenar üçgenken aslında.

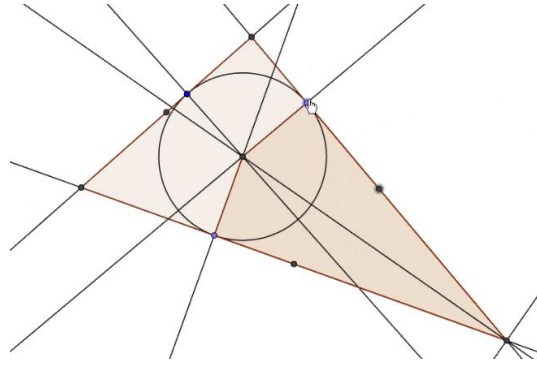
Görüşmeci: Eşkenar üçgenken. Şu an peki?

Gonca: Mesela deltoitin özelliğinde şu vardı yani mesela şu açılar açığı bu açılar da açığı ve şu iki karşılıklı açı birbirine eşit bağımsız vardı. Yani şu hatta şurada ikizkenarlık vardı yani deltoitte (dörtgenin belirli komşu kenarlarını gösterir). Hani mesela açığı doğruyu deneyeyim (açığı aracını kullanır). Aynı çıktı. Açığı (açığıların çakışık olduğunu öne sürer).

İlk açıklamaların ardından Gonca'nın akıl yürütme sürecinin odağında eşkenar üçgen görünümündeki figürün olduğu dikkate alınmış ve katılımcının inceleme sürecini diğer üçgenlere genişletmesi amaçlanarak şu diyalog gerçekleştirilmiştir:

Görüşmeci: Şimdi bu üçgeni de öyle bir sürüklemişsin ki güzel sürüklemişsin (Gülümser). Sanki bir de böyle kenarlar, eşkenar üçgen gibi görünüyor değil mi şu an?

Gonca: Evet. Çeşitkenar yapayım o zaman. Bunu bir şey yapalım bağımsız şöyle mesela evet artık eşkenar değil. Yine açıortay. Bir bakayım. Yine açıortay. Deltoit oluşturuyor yani. Şunun rengini değiştireyim. Daha iyi görmek açısından. Burada bir deltoit oluşuyor (söz konusu dörtgenin rengini değiştirir).



**Şekil 12.** Amaçlı sürüklenme yardımıyla eşkenar üçgen görünümünün değiştirilmesi

Katılımcı eşkenar üçgen görünümünü değiştirmek için figür üzerinde amaçlı sürüklenme yaparken, deltoide yönelik keşfettiği durumun herhangi bir çeşitkenar üçgen için de değişmediğini belirtmiştir. Gonca dörtgende gözlemediği açıortay özelliğini dikkate alarak düşüncelerini ifade etmiştir. Buna karşılık söz konusu dörtgende bir açığa ait açıortayın karşı açının da açıortayı olduğuna ilişkin varsayımın ispat gerektirdiği görülmüştür. Bu noktada Gonca'nın belirli matematiksel gerekçelerin yanında doğruluğu henüz kesin olmayan bir bilgiyi de gerekçe olarak kullandığı belirlenirken, -bu nedenle- yaptığı çıkarım geri-çıkarmı olarak ele alınmıştır.

Dördüncü aşama kapsamında Gonca'nın ilk başta incelediği üçgeni eşkenar üçgen görünümüne sürüklediği ve eşkenar üçgenin özellikleri aracılığıyla belli fikirler edindiği görülürken, bu bağlamda *amaçlı sürüklemenin* Gonca'ya görüşmeciden bağımsız yönlendirici destek sağladığı görülmüştür. Bunun yanında görüşmeci üçgensel bölgenin içinde oluşan dörtgenlere ilişkin düşünme sürecinde Gonca'ya matematiksel yönlendirici destek sağlarken, eşkenar üçgen görünümündeki figürün farklı üçgenlere sürüklenmesinde işlemsel türde yönlendirici destekler vermiştir. Bu bağlamda Gonca *amaçlı sürüklemeyi* bu kez görüşmecinin işlemsel türdeki yönlendirici desteği kapsamında kullanmıştır.

### **Deltoit ve Açıortay Temelli Çıkarım: Tümdengelimli Akıl Yürütme**

Geri-çıkarmının ardından görüşmeci bu aşamada Gonca'nın incelemekte olduğu özel dörtgenin (bir açısına ait açıortayı diğer köşe noktasından geçen dörtgenin) neden deltoit olduğuna ilişkin daha fazla gerekçe sunmasını istemiştir. Bu noktada katılımcı açıortayın dörtgende ayırdığı üçgenlere odaklanmış ve tümdengelimli akıl yürütme kapsamında açıortayın oluşturduğu iki eş açığa, teğet ve yarıçapların oluşturduğu dik açılara ve yarıçapların üçgenlerde oluşturduğu eş kenarlara referans vererek dörtgenin içerisinde iki eş üçgen oluştuğunu açıklamıştır. Gonca bu bilgilerden hareketle iki eş üçgenin dörtgende iki çift eş komşu kenar meydana getirdiği ve

dolayısıyla dörtgenin bir deltoit olduğu sonucuna ulaşmıştır. Gonca ispatlama sürecinde düşüncelerini aşağıdaki gibi açıklamıştır:

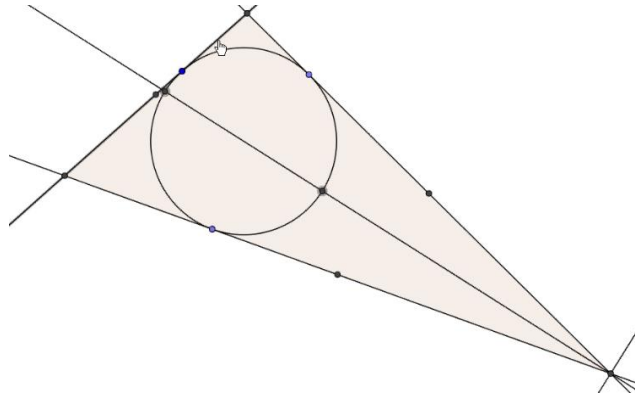
Gonca: Aslında iki tane üçgene ayırıyor bu açığı. O üçgenlerin eş olmasına bağlı olarak bir açığıktan bahsediyoruz. Mesela bu açığı iki üçgene ayırdı ya. Burası merkezi... Yarıçapı verir, burası da yarıçap (iki komşu kenarı gösterir), bunlar eşit uzunlukta doğrular (doğru parçaları). Burası da (diğer komşu kenar çiftini gösterir) aynı şekilde eşit. (Bu anda görüşmeci katılımcıya bu argümanın nedenini sorar) Neden... (Gülümser). (...) Teğet... Zaten teğete dik (dik açıları gösterir). Bir de yay, aynı yayı görüyorlar aslında. Eşit yayı görüyorlar (Duraksar) Eşit yayı görmüyorlar. Yani onda bir kesinlik yok aslında (incelemeye ve düşünmeye devam eder). Zaten açığı doğru kesiyor yani bunları baktığımda. Ben zaten açığı bilerek... Açığı ile ayırdım yani şu açılar zaten eşit. Zaten şu doğru parçalarının uzunlukları eşittir dedim (komşu kenarları tekrar gösterir). Çünkü ikisi de yarıçap. Şu açılar eşit (üçgenlerin diğer karşılıklı açılarını gösterir). Açık kenar açı... Benzerlik, yani eşlik oluyor burada. Şu iki üçgen eş oluyor. (...) Yani şunlar da eşittir (komşu kenar çiftlerini gösterir). Deltoit oluşturur bu." biçiminde düşüncelerini ifade etmiştir.

Deltoide ilişkin ispat sürecinin ardından Gonca yaptığı gözlemlerden hareketle deltoide -ve dolayısıyla üçgene- ait bir açığı çemberin merkez noktasından geçtiğine ve alternatif bir strateji kapsamında açığı çemberi kestiği noktaların orta noktasının merkezi vereceğine yönelik tümdengelimli çıkarıma ulaşmıştır.

Görüşmeci: Peki ben en başta sorduğum soruyu tekrar sorayım sana. Burada çemberin merkez noktasını bulmak ya asıl sorumuz. Onunla ilgili burada farklı bir strateji kullanılabilir mi?

Gonca: Yani aslında şey yapılabilir burada en başta hiçbir üçgen çizmeden sadece mesela dıştan iki teğet sadece iki teğet ve bu iki teğetin kesişim noktası alınarak herhangi iki noktadan iki teğet kesişim noktası alınarak kesişim noktasının arasında bir açığı çizilebilir. O açığı yola çıkarak bunların zaten bu açığı merkez kesişimden geçer. Merkez kesişim çapın üzerinden geçer. Ve bunun orta noktasına yine çemberin merkezidir diyebiliriz (Şekil 13).

Gonca açıklaması sırasında şekil üzerinde açığı dışındaki diğer çizimlerini gizlemiş ve üçgene ait bir açığı iç teğet çemberin içinde kalan kısmının her zaman çap olduğunu vurgulamıştır.



Şekil 13. Üçgende bir açığı iç teğet çemberin merkezinden geçtiğine yönelik çıkarım

Gonca'nın tümdengelimli çıkarım yaptığı son aşamada görüşmecinin merkez noktanın oluşturulması için farklı bir stratejinin kullanılıp kullanılmayacağına ilişkin sorduğu sorunun katılımcıya matematiksel yönlendirici destek sağladığı ve düşüncelerini yapılandırmasında yardımcı olduğu görülmüştür.

Görev tabanlı görüşme sürecinde Gonca'nın her bir aşamada temel aldığı ön bilgi ya da düşünceler, keşfettiği yeni bilgiler, gerçekleştirdiği akıl yürütme süreçleri ve aldığı yönlendirici destek türleri Tablo 3'te özetlenmiştir.

**Tablo 3.**

*Görev Tabanlı Görüşmede Takip Edilen Aşamalar, Düşünsel Süreçler ve Ortaya Çıkan Yönlendirici Destek Türleri*

Aşama No	Ön Bilgi/Düşünce	Keşfedilen Bilgi	Akıl Yürütme Süreci	Yönlendirici Destek Türü
1	Teğete, çembere değme noktasında dik olan doğru merkez noktadan geçer	Yeni bir bilgi keşfedilmemiştir	Tümdengelimli akıl yürütme	Yönlendirici desteğe ihtiyaç duyulmamıştır
2 (Orta nokta veya merkez aracı çıkarılmıştır)	Çemberde çapın orta dikmesi merkez noktayı oluşturur	Çemberde kirişlerin orta dikmeleri merkez noktada kesişir	Tümevarımsal akıl yürütme	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ DGY'nin görüşmeciden bağımsız olarak sağladığı yönlendirici destek <ul style="list-style-type: none"> <li>- Sürüklenme</li> <li>- Rastgele sürüklenme</li> <li>- Bağımlı sürüklenme</li> <li>- Amaçlı sürüklenme</li> </ul> </li> <li>- Orta dikme aracının sağladığı dönüt</li> </ul>
3	Üçgende kenarların orta dikmeleri iç teğet çemberin merkez noktasında kesişir	Üçgenin kenarlarına -iç teğet çembere değdiği noktalarda dik olan doğrular iç teğet çemberin merkez noktasında kesişir	(I) Algısal hatalar (II)Tümdengelimli akıl yürütme	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Görüşmecinin işlemsel türdeki yönlendirici desteği <ul style="list-style-type: none"> <li>- Sürüklenme</li> <li>- Sürüklenme testi</li> </ul> </li> <li>▪ Görüşmecinin matematiksel türdeki yönlendirici desteği</li> </ul>
4	Eşkenar üçgende iç teğet çemberin merkez noktasından kenarlara çizilen dik doğrular deltoit oluşturur	Herhangi bir çeşitkenar üçgende iç teğet çemberin merkez noktasından kenarlara çizilen dik doğrular deltoit oluşturur	Geri-çıkarma (abduction)	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ DGY'nin görüşmeciden bağımsız olarak sağladığı yönlendirici destek <ul style="list-style-type: none"> <li>- Orta dikme aracının sağladığı dönüt</li> <li>- Açığortay aracının sağladığı dönüt</li> </ul> </li> <li>▪ Görüşmecinin işlemsel türdeki yönlendirici desteği <ul style="list-style-type: none"> <li>- Sürüklenme</li> <li>- Amaçlı sürüklenme</li> </ul> </li> <li>▪ Görüşmecinin matematiksel türdeki yönlendirici desteği</li> </ul>
5	Karşılıklı iki açısına ait açıortayları çakışık olan dörtgen deltoittir	Üçgende bir açuya ait açıortay iç teğet çemberin merkez noktasından geçer	Tümdengelimli akıl yürütme	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Görüşmecinin matematiksel türdeki yönlendirici desteği</li> </ul>

Tablo 3'e göre Gonca görevin ilk aşamasında mevcut ön bilgilerine dayalı olarak yaptığı tümdengelimli akıl yürütme sürecinde herhangi bir yönlendirici desteğe ihtiyaç duymazken, beşinci aşamadaki tümdengelimli akıl yürütme süreci bağlamında ise varsayımlarını ispatlarken ve sonradan keşfettiği bilgilere dayalı olarak yeni bir strateji geliştirirken görüşmecinin

matematiksel türdeki yönlendirici desteğini almıştır. Bunun yanında Gonca ikinci aşamadaki tümevarımsal akıl yürütme süreciyle yaptığı keşifte DGY'nin görüşmeciden bağımsız olarak sağladığı yönlendirici desteklerden faydalanırken, bu süreçte farklı sürükleme türlerinin sunduğu görsel dönütler katılımcıya yardımcı olmuştur. Katılımcı üçüncü aşamadaki gözlemleri doğrultusunda bazı hatalı algısal çıkarımlar yaparken, bu çıkarımların yeniden değerlendirilmesinde görüşmecinin işlemsel ve matematiksel türdeki yönlendirici desteklerine ihtiyaç duymuştur. İşlemsel türdeki yönlendirici destek kapsamında Gonca sürükleme testinin sunduğu görsel dönütler yardımıyla fikirlerini düzenlemiştir. Dördüncü aşamadaki geri-çıkarma süreci kapsamında ise katılımcı bu sefer amaçlı sürüklemenin kullanımında görüşmecinin işlemsel türdeki yönlendirici desteğini almış ve bu sayede farklı üçgenler üzerinde düşünme olanağı yakalamıştır. Buna ek olarak Gonca dördüncü aşamada DGY'nin görüşmeciden bağımsız sağladığı yönlendirici destekler (orta dikme ve açıortay araçlarının sunduğu dönütler) yardımıyla figür ile ilgili varsayımlarını güçlendirirken, bazı geometrik ilişkilerin incelenmesinde görüşmecinin matematiksel yönlendirici desteğine de ihtiyaç duymuştur.

### Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmada bir matematik öğretmeni adayının bir geometrik inşa problemi kapsamında çemberde giriş ve teğetin merkez noktaya ilişkisine yönelik akıl yürütme süreçlerinin nasıl ortaya çıktığı ve bu süreçte ne tür yönlendirici desteklere ihtiyaç duyduğuna odaklanılmıştır. Dinamik geometri yazılımında araçların ve görev tabanlı görüşmelerin tümevarımsal akıl yürütmeye, geri-çıkarma ve tümdengelimli akıl yürütme sürecine yönlendirici destek sağladığı gözlenmiştir.

Gonca'nın ilk aşamada teğet ve çember ilişkisi üzerinde tümdengelimli akıl yürütme süreciyle strateji geliştirirken herhangi bir yönlendirici desteğe ihtiyaç duymadığı, diğer yandan DGY araçlarının söz konusu stratejinin uygulanmasına olanak verdiği görülmüştür. Örneğin, çemberin merkezini inşa etme sürecinde teğet ve çember ilişkisine dayalı tümdengelimli akıl yürütmeyle ortaya çıkan inşa stratejisi DGY'de kolayca uygulama alanı bulmuştur. Aynı problem çerçevesinde geleneksel araçlarla böyle bir stratejinin ortaya çıkamayacağı düşünüldüğünde (geleneksel araçlarla teğetin oluşturulabilmesi için önce çemberin merkez noktanın belli olması gerekmektedir), dinamik geometri yazılımındaki hazır inşa araçlarının kullanıcılar tarafından üretilen farklı stratejilerin uygulanmasına olanak tanıdığı söylenebilir.

Görev tabanlı görüşmenin ilk aşamasının ardından ikinci aşamada "orta nokta veya merkez" aracının araç çubuğundan çıkarılması ve öğretmen adayının farklı stratejileri kullanması istenmiştir. Bunun üzerine Gonca'nın ilk adımda yeniden bir çap elde etmeyi ve orta dikme aracıyla merkez noktayı oluşturmayı amaçladığı; ardından orta dikme - giriş ilişkisine odaklanarak yeni fikirler elde ettiği görülmüştür. Bu bağlamda DGY tabanlı matematiksel görevlerde farklı stratejilerin istenmesinin ve süreç içinde belirli araçların kullanımının kısıtlanmasının yeni geometrik ilişkiler üzerinde akıl yürütmelerine olanak sağlayabilmektedir.

Gonca birinci aşamadaki tümdengelimli akıl yürütme süreci sırasında yönlendirici desteğe ihtiyaç duymazken, ikinci aşamadaki tümevarımsal akıl yürütme sürecinde DGY'den - görüşmeciden bağımsız olarak - yönlendirici destek almıştır. Bu yönlendirici destek, sürükleme fonksiyonunun ve orta dikme aracının sağladığı dönütler olarak ortaya çıkarken, bu sayede Gonca, giriş-orta dikme ilişkisine odaklanmış ve tümevarımsal akıl yürütmeyle yeni bir bilgi

inşa etmiştir. Diğer bir ifadeyle, Gonca sürüklenme ve orta dikme aracı yardımıyla çemberde tüm kırımların orta dikmelerinin merkez noktada kesiştiğini keşfetmiş ve bu bilgi üzerinden bir çokgenin çevrel çemberinin merkez noktasını inşa etmeye yönelik çıkarımlara ulaşmıştır. Bu anlamda, Gonca'nın DGY araçları ve sürüklenme yardımıyla gerçekleştirdiği deneysel işlemler ve bu işlemlerin sonuçlarına dayalı genellemeler Leung ve Lopez-Real'in (2002) belirttiği üzere öğretmen adayının tümevarımsal akıl yürütme süreci için destekleyici bir öğrenme ortamı sağlamıştır. Bu bulgu DGY'deki sürüklenme türlerinin öğrencilerin akıl yürütme süreçlerini etkileşimli yolla destekleyebildiğini gösterirken, elde edilen sonuç Arzarello vd.'nin (2002) sonuçlarıyla benzerlik göstermektedir. Diğer yandan Arzarello vd. (2002) tanımladığı yedi sürüklenme türü arasındaki geçişlerin öğrencilerdeki geri-çıkarma sürecini desteklediğini ortaya koyarken, bu çalışma bağlamında ise rastgele, amaçlı ve bağımlı sürüklenme yardımıyla tümevarımsal akıl yürütme sürecinin ortaya çıktığı gözlemlenmiştir.

Görüşme sürecinin üçüncü aşamasında katılımcının görsel ve algısal yaklaşımlarının geometrik varsayımlarını yanlış yönlendirdiği fark edilmiştir. Bu aşamada Gonca'nın sürüklenme testini görüşmecinin işlemsel yönlendirici desteği ile birlikte kullandığı ve bu sayede hatalı çıkarımlarını yeniden değerlendirme olanağı bulunduğu görülmüştür. Bu noktada Gonca'nın DGY'deki "figür" ve "harekete dayanıklılık" kavramlarına ilişkin ön bilgisinin de sürüklenme testine bir değerlendirme aracı olarak anlam yüklemesini (Arzarello vd., 2002; Laborde, 2001; 2005) ve tümdengelimli akıl yürütme yaklaşımına dayanan figürleri ayırt etmesinde yönlendirici olmuştur (Öçal ve Şimşek, 2016). Özellikle Monaghan'ın (2016) vurguladığı üzere sürüklenmenin, Gonca'nın geometrik figürlerin değişmez özelliklerine odaklanmasına ve matematiksel ilişkileri düşünmesine destek olduğu görülmüştür. Bu anlamda, Gonca'nın DGY tabanlı yönlendirici destek alırken geometrik ilişkileri dikkate almaya başladığı ve -Jones'un (2000) sonuçlarına benzer şekilde- tümdengelimli akıl yürütmeye olanak sağlayan stratejiler uyguladığı görülmüştür.

Gonca üçüncü, dördüncü ve beşinci aşamalarda teğet özelliklerine yönelik keşif sürecinde ise görüşmecinin sağladığı işlemsel ve matematiksel türdeki yönlendirici desteklere daha fazla ihtiyaç duymuştur. Bu bağlamda katılımcının teğetin özelliklerine ilişkin bilgi eksikliğinin ve keşif süreciyle ilgili görüşmecinin yönlendirici desteğine daha fazla ihtiyaç duyduğunu ortaya çıkarmıştır. Bunun yanında Gonca'nın kırımlar-orta dikme ilişkisine yönelik keşfini üçüncü aşamadaki çözümünde teğetlere de uyarlayarak aşırı genelleme yaptığı görülmüştür. Bu süreçte Gonca'nın aynı zamanda eşkenar üçgenin özelliklerine ilişkin ön bilgilerine odaklandığı ve bu nedenle üzerinde çalıştığı üçgenleri amaçlı sürüklenme yardımıyla eşkenar üçgene yakın görünüme getirdiği düşünülmüştür. Diğer bir deyişle Gonca'nın akıl yürütme sürecini eşkenar üçgen bağlamında sınırlandırdığı gözlenirken, bu durumun Türnüklü, Gündoğdu Alaylı ve Akkaş'ın (2013) çalışmalarında vurguladığı üzere zihnindeki prototip imge ile ilişkili olduğu ve algıya dayalı hatalı çıkarımlara yol açtığı düşünülmektedir. Bu nedenle, görüşme sırasında Gonca'nın figürü farklı görünüme getirmesi ve yeniden düşünmesi istenerek işlemsel türde yönlendirici destekler sağlanmıştır. Gonca'nın akıl yürütme sürecini sınırlandırabilirdiği gözlenen prototip eşkenar üçgen imgesinin -diğer yandan- belli fikirlerin oluşmasında ise yardımcı olabildiği görülmüştür. Dördüncü aşamada Gonca ilk önce eşkenar üçgen görünümüne yakın figürler yardımıyla iç teğet çemberin teğetlerinin ve teğete dik doğruların oluşturduğu dörtgenlerin deltoit oldukları fikrine sahip olurken, devamında görüşmecinin işlemsel türdeki yönlendirici desteği yardımıyla bu düşüncesini diğer üçgenler için yeniden düzenlemiştir. Bununla birlikte Gonca'nın elde ettiği yeni fikirler üzerinden yaptığı geri-çıkarmın

ispatlanmaya ihtiyaç duyduğu görülmüş ve bu nedenle görüşmecinin matematiksel yönlendirici desteği yeniden ortaya çıkmıştır.

Arzarello vd. (2002) ve Baccaglioni-Frank (2010) yaptıkları çalışmalarda DGY'deki sürüklenme işleminin kullanıcıların geometrik yapılarla ilgili geri-çıkarma ulaşımlarında yardımcı olduğunu ortaya koymaktadırlar. Bu araştırmadaki sonuçlar da buna ek olarak DGY'deki açıortay ve dik doğru araçlarının ortaya çıkardığı görsel dönütlerin de Gonca'daki geri-çıkarma süreçlerini desteklediğini göstermiştir. Bu bağlamda sürüklenme işleminin dışında DGY'nin inşa araçlarının da geri-çıkarma için yönlendirici destekler sağlayabildiği görülmüştür.

### Öneriler

Araştırmada ortaya çıkan sonuçlardan hareketle öğretmen eğitimcilerinin geometri içerikli derslerinde DGY'de hazırlanmış geometri problemlerine yer vererek öğretmen adaylarının akıl yürütme süreçlerine uygun yönlendirici destekler sağlayabilecekleri düşünülmektedir. Bu sayede öğretmen adayları DGY aracılığıyla doğrulamalar, genellemeler ve ispatlar (Leung, 2011; Leung, Baccaglioni-Frank, & Mariotti, 2013; Mariotti, 2014) yapabileceklerinden, söz konusu uygulamaların öğretmen adaylarının teknolojik alan bilgilerini geliştirilebileceği de söylenebilir. Bu noktada DGY'nin kendine özgü matematiksel temsil biçimleri içerisinde çizim ve figür kavramları arasındaki farkı anlamlandıracakları düşünülmektedir. Ayrıca bu çalışmanın ortaya koyduğu üzere DGY'de araçların sınırlandırılması yöntemi ile öğrenciler farklı stratejilere yönlendirilerek açık uçlu sorularla farklı akıl yürütme biçimlerine odaklanmaları sağlanabilir.

Durum çalışması ile desenlenen bu araştırmada eksik kalan bazı noktaların üzerine gidilmesi gerektiği düşünülmektedir. Bu çalışmada DGY'nin bir matematik öğretmeni adayının bir geometrik inşa problemi bağlamındaki akıl yürütme süreçlerine sağladığı yönlendirici destekler incelenmiştir. Sonraki araştırmalarda farklı teknoloji ve matematik bilgisine sahip öğretmen adaylarını içeren sınıf ortamında çeşitli geometrik görevlerin DGY'de nasıl yürütüldüğü ve sınıf bağlamında ne tür yönlendirici desteklere ihtiyaç duyulduğu araştırılabilir.

### Teşekkür

Bu makale, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu (BAPK) tarafından desteklenmektedir (proje no: 2017-1682).

Bu çalışmanın yapılmasında kritik katkılar sağlayan Doç Dr. Melih TURĞUT'a teşekkürlerimizi sunarız.



### Kaynaklar / References

- Akyüz, D. (2014). Mathematical practices in a technological setting: A design research experiment for teaching circle properties. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14, 549-573.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(3), 66–72.
- Baccaglioni-Frank, A. (2010). *Conjecturing in dynamic geometry: A model for conjecture generation through maintaining dragging*. Unpublished Doctoral Dissertation, Durham: University of New Hampshire.
- Baccaglioni-Frank, A. & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), 225–253.
- Bogdan, R.C., & Biklen, S.K. (1998). *Qualitative Research for Education: An Introduction to Theory and Methods* (3rd Ed.). Boston, MA: Allyn and Bacon.
- Carpanter, T. P., & Franke, M. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary grades: Generalization and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the Twelfth ICMI Study Conference* (Vol. 1, pp. 155-162), Melbourne, Australia: University of Melbourne Press.
- Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.
- Dove, A. & Hollebrands, K. (2014). Teacher's scaffolding of students' learning of geometry while using a dynamic geometry program. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(5), 668–681.
- Euclid. (n.d.). *Euclid's Elements: All Thirteen Books in one Volume*. Santa Fe, NM: Green Lion Press.
- Eğitimi Araştırma ve Geliştirme Dairesi Başkanlığı- EARGED (2003). TIMSS 1999 Üçüncü Uluslararası Matematik ve Fen Bilgisi Çalışması Ulusal Rapor, Haziran, 2003.
- Eğitimi Araştırma ve Geliştirme Dairesi Başkanlığı- EARGED (2011). TIMSS 2007 Ulusal Matematik ve Fen Raporu 8. Sınıflar, Ankara.
- Gabillon, Z., & Ailincı, R. (2016). The role of artefacts and gestures in CLIL lessons. *The TESOL Journal*, 24, 26–37.
- Hazzan, O. & Goldenberg, E. P. (1997). Students' understanding of the notion of function. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1(3), 263–290.
- Healy, L. & Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 235–256.
- Hoyles, C. & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education*, (Vol. 1, pp. 323–349). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Jones, K. (2000). Providing a foundation for a deductive reasoning: students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 55–85.
- Köse, N., Uygan, C. ve Özen, D. (2012). Dinamik geometri yazılımlarındaki sürüklenme ve çeşitlerinin geometrik öğretimindeki rolü. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 3(1), 35–52.
- Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: The case of geometry. In C. Keitel and K. Ruthven (Eds.), *Learning through computers: Mathematics and educational technology* (pp. 48–67). Berlin, Germany: Springer.
- Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283–317.
- Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. In *Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 22–35), South Korea: Korea National University of Education.

- Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM Mathematics Education*, 43(3), 325–336.
- Leung, A., Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 439–460.
- Leung, A., & Lopez-Real, F. (2002). Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: A case of proof by contradiction. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(2), 145–165.
- Milli Eğitim Bakanlığı (2018a). *Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1.–8. Sınıflar)*. Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- Milli Eğitim Bakanlığı (2018b). *Ortaöğretim Matematik Dersi (9.–12. Sınıflar) Öğretim Programı*. Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- Maher, C.A., & Sigley, R. (2014). Task-based Interviews in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 579–582). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Mariotti, M. A. (1992). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspect. *Topologie Structurale/Structural Topology*, 18, 9–18.
- Mariotti, M. A. (2014). Transforming images in a DGS: The semiotic potential of the dragging tool for introducing the notion of conditional statement. In S. Rezat, M. Hattermann, & A. Peter-Koop (Eds.), *Transformation - A Fundamental Idea of Mathematics Education* (pp. 155–172). New York: Springer.
- Miles, M.B., & Huberman, A.M. (1994). *An Expanded Sourcebook: Qualitative Data Analysis*. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.
- Monaghan, J. (2016). Doing Mathematics with Tools: One Task, Four Tools. In J. Monaghan, L. Trouche, & J. M. Borwein (Eds.), *Tools and Mathematics* (pp. 13–22). Cham: Springer International Publishing.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Olivero, F. (1999). Cabri-Géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations. *Proceedings of the 4th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, Plymouth, UK, August 9-13, 1999, ICTMT 4. pp. 15. W.Maull and J.Sharp (Eds.).
- Peirce, C.S. (1960). *Collected Papers II, Elements of Logic*. MA: Harvard University Press.
- Presmeg, N. C., Barrett, J. E. & McCrone, S. (2007). Fostering generalization in connecting registers of dynamic geometry and Euclidean constructions. J.H. Woo, H.C. Lew, K.S. Park & D.Y. Seo (Eds). In *Proceedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4., pp. 81–88). Seoul: PME.
- Soldano, C. & Arzarello, F. (2016). Learning with touchscreen devices: game strategies to improve geometric thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 28, 9–30.
- Tapan-BROUTIN, M. S. (2010). *Bilgisayar Etkileşimli Geometri Öğretimi: Cabri Geometri ile Dinamik Geometri Etkinlikleri*. Bursa: Ezgi Kitabevi.
- Tapan-BROUTIN, M. S. (2014). Matematiksel nesnelerin yapısı ve temsiller: Klasik semiyotik üçgenin geometri öğretimine yansımalarının analizi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 27(1), 255–281.
- Tapan-BROUTIN, M. S. (2016). Çizim, geometrik şekil ve geometrik nesne kavramları ışığında çizimlerin yorumlanmasını etkileyen faktörler. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ.Ö. Zembat (Eds.), *Matematik Eğitiminde Teoriler içinde* (s. 277–290). Ankara: Pegem Akademi.
- Thompson, W. P. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, 25(3), 165–208.
- Türnüklü, E., Gündoğdu Alaylı, F. ve Akkaş, E. N. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dörtgenlere ilişkin algıları ve imgelerinin incelenmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri (KUYEB)*, 13(2), 1213–1232.
- Uygan, C. (2016). *Ortaokul öğrencilerinin zihnin geometrik alışkanlıklarının kazanımına yönelik dinamik geometri yazılımındaki öğrenme süreçleri*. Yayınlanmamış doktora tezi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: the Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Wells, G. (1999). *Dialogic Inquiry: Towards a Sociocultural Practice and Theory of Education*. New York: Cambridge University Press.
- Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2005). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (5. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

### Yazarlar

Dr. Candaş Uygan, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümünde öğretim üyesidir. İlgi alanları arasında, teknolojinin matematik eğitime entegrasyonu, matematik eğitiminde kanıt ve enstrümantal oluşum yer almaktadır.

Dr. Gülay Bozkurt, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümünde öğretim üyesidir. İlgi alanları arasında, teknolojinin matematik öğretimine entegrasyonu, enstrümantal oluşum ve enstrümantal orkestrasyon yer almaktadır.

### İletişim

Dr. Öğr. Üyesi Candaş Uygan, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Meşelik Kampüsü, 26480 Odunpazarı, Eskişehir. E-mail: [cuygan@ogu.edu.tr](mailto:cuygan@ogu.edu.tr)

Dr. Öğr. Üyesi Gülay Bozkurt, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Meşelik Kampüsü, 26480 Odunpazarı, Eskişehir. E-mail: [gbozkurt@ogu.edu.tr](mailto:gbozkurt@ogu.edu.tr)

## Summary

**Purpose and Significance.** Dynamic geometry software (DGS) enables learners to study mathematical relationships within geometric concepts through interactive and dynamic methods and in this process to discover the invariant properties of concepts by the use of various tools of DGS. The use of DGS differs from the conventional learning tools with its distinctive forms of geometric representation. In order to understand this difference, two separate mathematical representations called as “figure” and “drawing” should be known. In traditional learning environments, drawing is insufficient to reflect the properties of a geometric concept by itself in terms of its limited nature (Tapan-BROUTIN, 2014, 2016).

Figure in a DGS can be regarded as *construction* in the Euclidean sense and preserves its invariants under the action of *dragging*, which is defined as *robustness* (LORDE, 2001; 2005; Tapan-BROUTIN, 2014; 2016). Robustness of a figure is related to the fact that the geometric object is constructed with appropriate mathematical relationships. In this sense, DGS is considered having an important role in (re)inventing characteristic properties of the figures and also in the meaning-making of mathematical concepts (JONES, 2000; LEUNG, BACCAGLINI-FRANK & MARIOTTI, 2013). In this work, considering the participants’ experience and pre-knowledge related to DGS, we focus on the use of GeoGebra as a dynamic geometry software.

**Conceptual Framework.** The theoretical background of the study consists of three constructs: scaffolding (VYGOTSKY, 1978), classifications of reasoning (PEIRCE, 1960) and different modalities of dragging (ARZARELLO, OLIVERO, PAOLA, and ROBUTTI, 2002).

Zone of proximal development (ZPD) is defined as “the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers” (VYGOTSKY, 1978, p. 86). Scaffolding is an important concept in ZPD, which is considered as “a way of operationalising Vygotsky’s (1987) concept of working in the zone of proximal development” (WELLS, 1999, p.127). In the context of this study, we focus on scaffolding provided by the use of dynamic geometry software and the interviewer-researcher as the knowledgeable other.

Peirce (1960) classifies deduction as a reasoning type in which inferences are made about the characteristics of an object that is involved in a concept whose properties are already known. Second, induction is a reasoning type in which the generalization is made about the characteristics of the concept by referring to some exemplary objects whose properties are already known and involved in the related concept. Thirdly, abduction is a reasoning type in which inferences are made between the properties of a special object and the properties of a known concept, and then inaccurate conclusions are made about whether the object is included in one of these conceptual classifications.

Arzarello, Olivero, Paola, and Robutti (2002) identified seven different modalities of dragging (wandering dragging, bound dragging, guided dragging, dummy focus dragging, line dragging, linked dragging, and dragging test) that students used while working on open problems in a DGS. The researchers indicated that the use of different types of dragging related to cognitive ascending and descending processes, which showed the dialectic between perceptual and theoretical level of students’ mathematical activity.

In the light of the three main constructs discussed above, the specific research question addressed in this study is as follows: What are the GeoGebra-based scaffolding and the reasoning processes of a prospective mathematics teacher during such scaffolding while exploring the relations of chord and tangent to the centre point in circle in a geometric construction problem?

**Methodology.** This study is designed as a case study. Data is collected through a task-based interview conducted with a prospective mathematics teacher, Gonca (pseudonym, female and 22 years old), who was enrolled in lower secondary mathematics education program of a state University located in central Turkey. Gonca had basic experience about the use of GeoGebra in the geometric construction problems, however had a lack of knowledge about the relationship between chord and centre point in circle. During the interview, a task regarding construction of the centre of a given circle was proposed in DGS. The task-based interview was recorded through video-camera and also screen recorder was used to collect the participant's operations in DGS. The collected data was analysed in terms of descriptive analysis (for the analysis of reasoning processes and dragging modalities) and content analysis (for the categorisation of scaffolding) based on the adopted constructs of scaffolding (Vygotsky, 1978), reasoning types classified by Peirce (1960) such as abduction, induction, and also dragging modalities classified by Arzarello et al. (2002). The researchers made detailed transcriptions of the video recordings and screen recorder data obtained from the task-based interview and they identified the codes and themes by working independently. Then, they came together to compare the codes, themes, and sub-themes that they obtained individually and agreed on the different interpretations and completed the analysis process.

**Discussion and Conclusions.** The results indicated that the role of the use of DGS and task-based interviews provided scaffolding for inductive reasoning, abduction and deductive reasoning. While working on a construction problem with DGS tools, Gonca started to consider geometrical relationships related to various tools and to apply different strategies referring to inductive, abductive and deductive steps. With the use of the dragging test, which is supported by the interviewer, Gonca started to realise and correct her perceptual inferences. In particular through the aspect of dragging, DGS increased the possibilities of visualisation and mediated her actions to make geometrical relationships. Also it was seen that Gonca had an opportunity to conduct inductive reasoning and discover the relationships of perpendicular bisector of chord and centre point in circle with the use of wandering dragging, guided dragging and linked dragging.

In the first stage of the task based interview, it was seen that Gonca did not need any scaffolding for her reasoning process and she completed the construction with deductive reasoning in which she referred to geometrical relations between tangent and centre of circle. However, in the second stage in which she was asked to use a different method for the same task, she needed scaffolding of wandering dragging, guided dragging and linked dragging in DGS that was not intervened by the interviewer in which Gonca conducted inductive reasoning about the geometrical relations between perpendicular bisectors of chords within circle by receiving visual feedbacks from dragging of the chords. As Leung and Lopez-Real (2002) remarked, the findings of the second stage indicated that experimental operations in DGS facilitated explorations and generalizations within inductive reasoning process.

In the third stage of the task based interview, since Gonca's perceptual justifications about the properties of the triangle that seem like equilateral triangle caused incorrect inferences about the

method for construction of the centre of the inscribed circle within any triangle, the interviewer needed to provide operational scaffolding for Gonca in which she was asked to use dragging test to see whether the properties of the triangle change. By this way it was seen that Gonca had opportunity to evaluate her perceptual justifications and needed to reason deductively by considering the geometrical relations between sides of the triangle and the inscribed circle. This finding indicated that Gonca's pre-knowledge about the concept of "figure" and "robustness" (Laborde, 2001; Laborde, 2005) allowed her to understand the role of the dragging test (Arzarello et al., 2002) and consider the construction methods based on geometrical relations and deductive reasoning processes (Jones, 2000).

In the fourth stage of the task, Gonca benefited from the scaffolding of DGS (experimental results of the use of perpendicular line and angle bisector tools) and also from operational and mathematical scaffolding provided by the interviewer (guided dragging and mathematical questioning) for abductive reasoning on the properties of the quadrilaterals created by two tangents of circle and two lines that are perpendicular to the tangents. In the fifth stage of the task, Gonca needed mathematical scaffolding from the interviewer regarding the constructed figures in which she was encouraged to reflect on the geometrical relations between an angle bisector and the inscribed circle of triangle and justify her conjectures about the quadrilaterals previously mentioned in the fourth stage. By this way Gonca had an opportunity to develop a new strategy for the construction of the centre of inscribed circle in a triangle through deductive reasoning on geometrical relations within the related figure.

The results of this study showed that the visual feedback provided by the angle bisector and perpendicular line tools in DGS also supported the abduction processes of Gonca. On the other hand, Arzarello et al. (2002) revealed that the transitions between the seven types of dragging modalities supported the process of abduction, while in the context of this study, inductive reasoning process with wandering, guided and linked dragging were observed. To conclude, we could say that DGS based scaffolding became an effective way to support the participant's different reasoning processes in construction tasks and enabled her to focus on geometrical relationships and deductive justifications (Jones, 2000) instead of perceptual justifications.