ENAD ONLINE
EĞİTİMDE NİTEL ARAŞTIRMALAR DERGİSİ
Journal of Qualitative Research in Education

Volume 8 / Issue 2, 2020

Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - ENAD

Journal of Qualitative Research in Education - JOQRE

Öğretmen Adaylarının İki Niceliğin Eş Zamanlı Değişimini İçeren Dinamik Fonksiyonel Durumlar İçin Oluşturdukları Grafik Temsilleri*

Prospective Teachers' Graphical Representations for Two Simultaneously Changing Quantities in Dynamic Functional Situations

Fadime Ulusoy**

To cite this article/ Atıf icin:

Ulusoy, F. (2020). Öğretmen adaylarının iki niceliğin eş zamanlı değişimini içeren dinamik fonksiyonel durumlar için oluşturdukları grafik temsilleri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi – Journal of Qualitative Research in Education. 8*(2), 462-488. doi: 10.14689/issn.2148-624.1.8c.2s.3m

Makale Hakkında

Gönderim Tarihi: 05.11.2019

Düzeltme Tarihi: 20.01.2020

Kabul Tarihi:18.04.2020

Öz. Bu araştırma, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının iki değişkenin eş zamanlı değişimini içeren dinamik fonksiyonel durumları yorumlarken değişkenler arasındaki ilişkiyi grafik temsilleri aracılığıyla nasıl ifade ettiklerini ortaya çıkarmayı amaçlamaktadır. Bütüncül bir durum çalışması olan bu çalışmanın katılımcıları, bir devlet üniversitesinde öğrenim gören 100 ilköğretim matematik öğretmeni adayıdır. Veriler, içine su ile doldurulan iki farklı özellikteki şişeye ait yükseklik-hacim grafiğinin çizilmesini gerektiren bir dinamik fonksiyonel durum etkinliği için yapılan yazılı açıklamalar, grafik çizimleri ve klinik görüşmeler yoluyla elde edilmiştir. Bulgular, sadece altı öğretmen adayının grafik temsillerinin her iki durum için de doğru olduğunu göstermiştir. Grafik temsillerinde tespit edilen belirgin hatalar ve eksiklikler şunlar olmuştur: (i) değişkenler arasındaki farklı doğrusal ilişkiler için eğimleri koordine edememe, (ii) değişkenler arasındaki doğrusal olmayan ilişkileri doğrusal temsil etme, (iii) bağımlı ve bağımsız değişkenlerin rollerini değiştirerek temsil etme, (iv) değişkenler arasındaki ilişkiyi artan yerine azalan şekilde temsil etme ve (v) değişkenler arasındaki ilişkiyi verilen dinamik fonksiyonel durumun gerektirdiğinden daha az veya fazla sayıda bölüm içerecek biçimde temsil etme.

Anahtar Kelimeler: Kovaryasyonel düşünme, nitel grafikler, dinamik fonksiyonel durumlar, değişim oranı

Abstract. This study aims to reveal how prospective teachers express the relationships between variables through graphical representations when interpreting dynamic functional situations involving two simultaneously changing quantities. 100 prospective middle school mathematics teachers participated to this case study. The data consisted of prospective teachers' written responses to the task involving filling bottles with water and the graphs of volume as a function of height and clinical interviews were used to examine their covariational reasoning and graphing abilities. The findings showed that only six prospective teachers' graphical representations were correct for both dynamic functional situations. The most significant and common problems in the graphical representations were found such as (i) inability to coordinate slopes for linear relationships between variables, (ii) representing nonlinear relations of variables as linear relations, (iii) reversing the roles of dependent and independent variables, (iv) representing the relationship between variables as decreasing rather than increasing and (v) representing the relationships between variables to include more or less partitions to the graph than required by the given dynamic functional situation.

Keywords: Covariational reasoning, qualitative graphs, dynamic functional situations, rate of change

* Bu araştırma, 19-22 Haziran 2019'da Ankara Üniversitesi'nde gerçekleştirilen VI. International Eurasian Educational Research Congress'de (EJER-2019) sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

** *Sorumlu Yazar / Correspondence*: Kastamonu Üniversitesi, Türkiye, fadimebayik@gmail.com ORCID: 0000-0003-3393-8778

Giriş

"Değişim" ve "değişim oranı", ortaokuldan yükseköğretime kadar matematik öğretim programlarında yer tutan iki önemli kavramdır (Thompson ve Carlson, 2017). "Değişim" kavramı tek bir değişken üzerinden yorumlanırken, "değişim oranı" kavramı iki değişkenin birbiriyle ilişkili olarak nasıl değiştiğini niceliksel ve niteliksel anlamda incelemeyi sağlar (Kertil, Erbaş ve Çetinkaya, 2017). Değişim oranı kavramını temeline alan "kovaryasyonel düşünme" ise iki farklı niceliğin eş zamanlı değişiminin koordineli bir şekilde incelenmesini içerir (Carlson, 1998; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen ve Hsu, 2002; Saldanha ve Thompson, 1998; Thompson, 1994). Ayrıca kovaryasyonel düşünme, iki değişkenin birbirine göre değişimini sadece bazı sayısal değerlere göre koordine etmeyi değil, bu değişimi tüm değerler için sürekli bir koordinasyon ile incelemeyi gerektirmektedir (Saldanha ve Thompson, 1998). Bu yönüyle, kovaryasyonel düşünme dinamik, sürekli ve gelişimsel bir yapıya sahiptir (Thompson, 2011). Niceliklerdeki eş zamanlı değişimlerin koordine edilmesi ise değişim oranı, fonksiyon, eğim ve türev gibi önemli matematiksel kavramların temelini oluşturur ve bu kavramların anlaşılmasına yardımcı olur (Carlson vd., 2002; Carlson, Larsen ve Lesh, 2003).

Kovaryasyonel düşünmenin matematik kavramları açısından taşıdığı öneme paralel olarak son yıllarda araştırmacılar çeşitli matematiksel kavramlar ve konular üzerinde öğrencilerin kovaryasyonel düşünmeyi nasıl anlamlandırdıklarını ortaya çıkarmayı hedefleyen çalışmalara yoğunlaşmışlardır (örn., parametrik fonksiyonlar (Paoletti ve Moore, 2017; Stalvey ve Vidakovic, 2015), üstel fonksiyonlar (Ellis, Ozgur, Kulow, Williams ve Amidon, 2015), değişim oranı ve orantı (Johnson, 2015), türev (Jones, 2017) ve örüntüler (Wilkie, 2019)). Çalışmalar öğrencilerin değişim oranı ve kovaryasyonel düşünme ile ilgili eksiklikleri nedeniyle daha çok üniversite düzeyinde ele alınan fonksiyonlar, limit, türev ve integral gibi matematik kavramlarını anlamada ciddi sıkıntılar yaşadıklarını vurgulamaktadır (Monk, 1992; Monk ve Nemirovsky, 1994; Thompson, 1994). Araştırmalar incelendiğinde üniversite öğrencilerinin kovaryasyonel düşünme süreçleri ile ilgili çalışmaların çoğunlukta olduğu görülmektedir. Oysa kovaryasyonel düşünme, ortaokul seviyesinde de oran, orantı, eğim ve örüntüler gibi birçok matematik konusunun kavramsal boyutta anlaşılması bakımından kritik role sahiptir (Thompson ve Carlson, 2017). Örneğin, ortaokul düzeyinde öğrenciler çeşitli bağlamlarda değişik örüntüleri inceleyerek kovaryasyonel muhakemeyi öğrenmeye başlarlar (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Ayrıca, öğrenciler ortaokul matematik öğrenme alanları içinde oran, orantı, eğim ve doğrusal denklemleri de öğrenmektedirler. Bu nedenle, ortaokul düzeyinde kovaryasyonel düşünmenin kavranması sonraki yıllarda limit, türev ve integral gibi ileri düzey matematik konularının anlamlı öğrenilmesi bakımından önem taşımaktadır (Confrey ve Smith, 1995). Bu doğrultuda, matematik eğitimcileri öğrencilerin erken yaşlarda "değişim oranı" kavramıyla ilgili çalışmalarının sağlanması gerektiğini vurgulamaktadır (Confrey ve Smith, 1995; Thompson, 1994).

Öğrencilerin kovaryasyonel düşünme becerilerinin desteklenmesinde ise öğretmenlerin bu konudaki alan bilgilerinin yeterli seviyede olması gerekir (Thompson, 2013; Thompson ve Carlson, 2017). Bu farkındalıkla, son yıllarda matematik eğitimi araştırmacıları değişim oranının kavramsallaştırılmasında öğretmen adaylarının veya öğretmenlerin kovaryasyonel düşünme süreçlerini araştırma eğilimi göstermektedir. Örneğin, Thompson, Hatfield, Yoon, Joshua ve Byerley (2017) öğretmenler için grafiklerdeki kovaryasyon anlamını yorumlama ve fark etmenin alışılagelmiş bir durum olmadığını belirtmektedir. Birçok çalışmada da öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının kovaryasyonel düşünme becerilerinin araştırılmasının ve geliştirilmesinin gerekliliğinden açıkça bahsedilmektedir (örn., Carlson vd., 2003; Paoletti ve Moore, 2017; Thompson ve Carlson, 2017; Thompson vd., 2017). Fakat kovaryasyonel düşünmeyi içeren matematik konularının lise ve üniversite düzeyinde yoğunlaşması gibi olası bir nedenden ötürü ortaokul matematik öğretmenlerinin veya öğretmen adaylarının kovaryasyonel düşünme süreçlerine daha az odaklanıldığı dikkat çekmektedir (Kertil vd., 2017; Stalvey ve Vidakovic, 2015; Şen-Zeytun, Çetinkaya ve Erbaş, 2010; Yemen-Karpuzcu, Ulusoy ve Işıksal-Bostan, 2017). Bu araştırmaların sonuçları ise matematik öğretmeni adaylarının kovaryasyonel düşünme süreçlerinde değişkenler arasındaki ilişkinin koordine edilmesi ve değişkenlerin uygun biçimde atanması gibi konularda ciddi sıkıntılar yaşadıklarını vurgulamaktadır. Bu bakımdan, öğrencilerin kovaryasyonel anlama ile ilgili doğru kavrayışlar oluşturabilmesi için öğretmen adaylarının lisans programlarını tamamlamadan önce bu konuda ne bildiklerinin araştırılması ve konu ile ilgili eksikliklerinin giderilmesi önem taşımaktadır.

İlgili alan yazın incelendiğinde, kovaryasyonel düşünmenin anlaşılmasında dinamik fonksiyonel durumların kullanılmasının değişim oranı ile kovaryasyonel muhakeme arasında ilişkilerin kurulmasını sağlamaya yardımcı olduğu belirtilmektedir (Carlson, 1998; Confrey ve Smith, 1995; Koklu ve Jakubowski, 2010). Örneğin, zamana göre bir aracın hızının nasıl değiştiğinin incelenmesi gibi kinematik durumlar ya da bir şişedeki suyun hacmine göre yüksekliğinin nasıl değiştiğinin ele alınması gibi durumlar birer dinamik fonksiyonel durum örneğidir (Carlson vd., 2002; Johnson, 2015). Araştırmacılara göre, dinamik fonksiyonel durumları incelemek, bir değişkenin ele alınan bağlam kapsamında nasıl değiştiğinin incelenerek diğer değişkendeki değişimleri görselleştirmeyi sağlamaktadır (Gravemeijer ve Doorman, 1999; Moore ve Thompson, 2015; Yemen-Karpuzcu vd., 2017). Diğer taraftan, dinamik fonksiyonel durumlar ele alınan bağlamın grafik üzerinde yorumlanmasını veya grafiğe aktarılmasını da gerektirmektedir. Oluşturulan grafikler ise araştırmacılara ele alınan değişkenlerin eş zamanlı değişimine öğrencilerin matematiksel olarak hangi anlamları yüklediklerini anlama fırsatları sunmaktadır (Kertil, Erbaş ve Çetinkaya, 2019; Yemen-Karpuzcu vd., 2017). Örneğin, Moore ve Thompson (2017), birçok öğretmenin değişkenler arasındaki ilişkiyi kovaryasyon yerine grafiğin sabit şekli üzerinden (static shape thinking) yorumlamaya çalıştıklarını belirtmiştir. Dinamik fonksiyonel durumlar için üretilen grafik temsillerinin kovaryasyonel düşünmeyi yorumlamadaki etkin rolü ve konu özelinde öğretmen adaylarıyla yapılan çalışmaların sınırlılığı göz önünde bulundurularak, bu araştırmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının iki değişkenin eş zamanlı değişimini içeren dinamik fonksiyonel durumları yorumlarken değişkenler arasındaki ilişkiyi grafik temsilleri ile nasıl ifade ettikleri incelenmiştir. Bu doğrultuda şu araştırma sorularına cevap aranmıştır: (1) İlköğretim matematik öğretmeni adayları iki değişkenin eş zamanlı değişimini içeren dinamik fonksiyonel durumları yorumlarken değişkenler arasındaki ilişkiyi grafik temsilleri aracılığıyla nasıl ifade etmişlerdir? (2) İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının iki değişkenin eş zamanlı değişimini içeren dinamik fonksiyonel durumlar için ürettikleri grafik temsillerindeki hatalar ve eksiklikler nelerdir?

Kovaryasyonel Düşünme

Kovaryasyonel düşünme, eş zamanlı ve dinamik olarak değişen iki niceliğin birlikte değişimini düşünerek koordine edebilme ve değişimler arasındaki ilişkiyi bütüncül olarak yorumlayabilme becerisidir (Carlson vd., 2002). Bu konuda, Carlson vd. (2002) bir dinamik fonksiyonel durum bağlamında değişkenlerin ilişkilendirilmesinde gerçekleşen belli zihinsel eylemleri (mental actions) inceleyerek kovaryasyonel düşünmeyi 5 farklı seviyede ele aldıkları *Kovaryasyonel*

EĞİTİMDE NİTEL ARAŞTIRMALAR DERGİSİ
Journal of Qualitative Research in Education
Cilt 8 / Sayı 2, 2020
Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - ENAD
Journal of Qualitative Research in Education - JOQRE

Düşünme Çerçevesi'ni sunmuştur. Bu çerçevede yer alan seviyelerin isimleri ve her bir seviyenin içerdiği zihinsel eylemler Tablo 1'de özetlenmiştir.

Tablo 1

*Kovaryasyonel Düşünme Çerçevesindeki Zihinsel Eylemler ve Seviyeler (*Carlson vd., 2002)

Zihinsel Eylem (ZE)	Seviye 1 Koordinasyon	Seviye 2 Yön	Seviye 3 Niceliksel koordinasyon	Seviye 4 Ortalama değişim oranı	Seviye 5 Anlık değişim oranı
(ZE1)	Bir değişkenin değerini diğer değişkenlerdeki değişimlerle koordine etme	Bir değişkenin yönünü diğer değişkendeki değişimlerle koordine etme	Bir değişkenin miktarını diğer değişkendeki değişimlerle koordine etme	Fonksiyonun ortalama değişim oranını (hızını), bağımsız değişkendeki eş artışlarla koordine etme	Fonksiyonun anlık değişim oranını (hızını), fonksiyonun bağımsız değişkenindeki sürekli değişikliklerle koordine etme
(ZE2)					
(ZE3)					
(ZE4)					
(ZE5)					

Tablo 1'de özetle görüldüğü üzere, *Koordinasyon seviyesi*, bir değişkenin diğer değişken ile yön ve miktar dahi belirtmeden koordine edilmesini içeren zihinsel eylemleri kapsar. Örneğin, "hacim değişince yükseklik de değişir" söylemi değişimin niteliğini belirtmeden iki değişken arasında bir değişimin varlığına dair bir koordinasyonu içermektedir. Değişimin yönünün belirtildiği *Yön seviyesi* ZE1 ve ZE2'de ifade edilen eylemlerin sergilenebileceği bir seviyedir. Bu seviyedeki bir öğrenci, bağımsız değişkendeki değişimleri düşünerek bağımlı değişkenin ne yönde değişeceğini belirtebilir (örn., su ekledikçe suyun yüksekliği artar). *Niceliksel koordinasyon seviyesi* ise artık bağımsız değişken ekseninin eşit aralıklara bölünmesini ve bu eşit aralıklarda değişkenin miktarına bakarak bağımlı değişkendeki değişimlerin yorumlanmasını içerir. Teorik çerçeveye göre bu seviyede bir öğrenci ZE3 ve altındaki tüm zihinsel eylemleri sergileyebilir. *Ortalama değişim oranı seviyesi* ise bağımsız değişkenin eşit miktarlarında grafikte oluşacak eğimin özeliklerini incelemeyi ve iki değişkeni sistematik olarak koordine etmeyi içerir. Bu seviyede bir öğrenci ZE4 ve altındaki tüm zihinsel eylemleri sergileyebilir. *Anlık değişim oranı seviyesi* ise bağımsız değişkeni birim birim ele almayı ve bağımsız değişkenin her biriminde bağımlı değişkendeki değişimleri sistematik olarak incelemeyi içermektedir. Bu seviyede, bir öğrenci şişelere su doldurulmasını içeren dinamik fonksiyonel durum için şişelerin konkav yapılarını hesaba katarak değişkenler arasındaki ilişkinin nasıl olacağını yorumlayabilir ve bu ilişkiyi ortaya çıkacak eğriyi grafiğine yansıtabilir. Sonuç olarak, Carlson vd. (2002) bu teorik çerçevede kovaryasyon imgesinin dinamik bir yapıda ve seviyelerin gelişimsel bir nitelikte olduğuna dikkat çekmişlerdir.

Carlson vd. (2003) öne sürdükleri teorik çerçeve kapsamında öğretmen adaylarının kovaryasyonel düşünme süreçlerini incelemişlerdir. Çalışma sonucunda bazı öğretmen adaylarının (i) bağımlı ve bağımsız değişkenlerin rollerini uygun olmayacak biçimde değiştirdiklerini, (ii) bazı durumlarda bağımlı ve bağımsız değişken dışında "zaman" gibi ikincil bir değişkeni işe koştuklarını ve (iii) değişkenler arasındaki doğrusal olmayan ilişkileri sözel olarak ifade edemediklerini gözlemlemişlerdir. Benzer şekilde, bu teorik çerçeveyi kullanarak, Yemen-Karpuzcu vd. (2017) kovaryasyonel düşünme düzeyi yüksek ve zayıf olan iki öğretmen adayının akran öğrenme ortamında kovaryasyonel düşünme süreçlerinin nasıl değiştiğini incelemişlerdir. Çalışma sonucunda, akran öğrenme ortamı her ne kadar kovaryasyonel düşünme seviyesi zayıf olan öğretmen adayına kendi hatalarını fark etmesi adına fayda sağlasa da onun değişkenlerin rollerini belirleme ve değişim oranını sistematik yorumlama konularındaki sınırlı zihinsel imgelerini değiştirmede tam manada yeterli olmadığını ortaya çıkarmıştır.

Son yıllarda, Carlson vd.'nin (2002) öne sürdüğü teorik çerçevenin özellikle son iki seviyeyi yeterli açıklayamadığı yönünde yapılan eleştiriler üzerine kovaryasyonel düşünmenin daha anlaşılır karakterize edilmesi için araştırmacılar tarafından yeni adımlar atılmıştır (Johnson, 2015; Kertil vd., 2019; Thompson ve Carlson, 2017). Örneğin, Thompson ve Carlson (2017) beş seviyesi olan kovaryasyonel düşünme çerçevesini yeniden düzenlemişlerdir. Tüm düzeylerde çeşitli modifikasyonlar yaparak yeniden düzenledikleri çerçeveye "değişkenlerin koordine edilememesini" ilk seviye olarak eklemişlerdir. Diğer taraftan, kovaryasyonel düşünme ile ilgili yapılan tüm teorik çerçevelerin analizini yaparak Kertil vd. (2019) modelleme etkinliklerinin kullanıldığı bir tasarım tabanlı araştırma kapsamında öğretmen adaylarının kovaryasyonel düşünme süreçlerini incelemişlerdir. Bu inceleme sonucunda araştırmacılar Thompson ve Carlson (2017) tarafından güncellenen kovaryasyonel düşünme seviyeleri ve niceliksel düşünme teorisini daha açık hale getirmişlerdir. Kertil vd. (2019) sundukları teorik yapıda kovaryasyonel düşünmeyi (i) değişkenlerin belirlenmesi, (ii) değişkenlerin koordine edilmesi ve (iii) değişim oranının nicelleştirilmesi bileşenleri doğrultusunda Tablo 2'deki gibi ele almışlardır. Kertil vd. (2019) yaptıkları tasarım tabanlı çalışmada öğretmen adaylarının modelleme etkinlikleriyle uğraştıkça Tablo 2'de açıklanan kovaryasyonel düşünme seviyelerinde ciddi manada iyileşmeler olduğu sonucuna varmıştır. Örneğin, çalışmanın başlangıcında öğretmen adayları "zaman" gibi ikincil değişkenler üzerinden değişkenlerin ilişkilerini açıklarken çalışmanın ilerleyen aşamalarında bu konudaki eğilim ciddi oranda azalmıştır. Benzer şekilde, çalışmanın başında öğretmen adaylarının birçoğu değişkenler arasındaki ilişkiyi koordine bile edemezken çalışmanın ilerleyen aşamalarında doğrudan ve sistematik koordinasyon yapabilen öğretmen adayı sayısı oldukça artmıştır. Bu anlamda, katılımcılar değişkenleri kabaca incelemek yerine değişkenlerden birini birim birim arttırarak diğer değişkenin değişimini gözlemlemişlerdir.

Açıklanan bu teorik çerçeveler doğrultusunda öğrencilerin veya öğretmenlerin kovaryasyonel düşünme seviyelerinin gruplandırılması alan yazında sıklıkla yapılmaktadır. Bu araştırmada ise, öğretmen adaylarının iki değişkenin eş zamanlı değişimini içeren dinamik fonksiyonel durumları yorumlarken değişkenler arasındaki ilişkiyi grafik temsilleri aracılığıyla nasıl ifade ettiklerinin ve grafiklerde belirgin olarak ortaya çıkan hataların neler olduğunun belirlenmesinde kovaryasyonel düşünme çerçevelerine göre doğrudan bir seviye analizi yapılmamıştır. Onun yerine, öğretmen adaylarının çizdiği her bir grafik değişkenlerin ele alınış biçimine göre detaylı olarak incelenmiş ve içerdiği eksiklikler ortaya çıkarılmıştır. Bu eksikliklerin muhtemel nedenleri ise bahsi geçen teorik çerçevelerin ışığında yorumlanmıştır. Diğer bir deyişle, bahsi geçen teorik çerçeveler doğrudan kodlar çerçevesinde kullanılmasa bile öğretmen adaylarının grafiklerindeki hata ve eksikliklerinin tespiti ve bunların nedenlerinin belirlenmesinde önemli roller üstlenmiştir. Bu yönüyle, çalışmanın grafik temsilleri özelinde kovaryasyonel düşünme alan yazınına önemli katkılar sağlayacağı düşünülmektedir.

Tablo 2.

Kovaryasyonel Düşünme: Boyutları ve Alt Bileşenleri (Kertil, 2020, s.3-4; Kertil vd., 2019, s.5)

Boyutlar ve Alt Bileşenleri	Açıklama
Değişkenlerin belirlenmesi	
Birincil değişkenlerle düşünme	Eş zamanlı değişen iki değişkenden birisini bağımlı diğerini ise bağımsız değişken olarak alma
İkincil değişkenlerle düşünme	Problem bağlamında verilmeyen üçüncü bir değişken ile düşünme
Değişkenlerin rolünü değiştirme	Bağımlı ve bağımsız değişkenleri yer değiştirerek düşünme
Değişkenlerin koordine edilmesi	
Koordine edememe	Eş zamanlı değişimleri üçüncü bir değişkene bağlı olarak ayrı ayrı düşünme. (*örn., Hacim zamana bağlı olarak artıyor, yükseklik zamana bağlı olarak artıyor.)*
Dolaylı koordinasyon	Eş zamanlı değişimleri üçüncü bir değişkene bağlı olarak dolaylı koordine etme. (*örn. Hacim ve yüksekliğin her ikisi de zamana bağlı olarak artıyor.)*
Doğrudan koordinasyon	Eş zamanlı değişimler arasında doğrudan ilişki kurma (*örn., Hacim arttıkça yükseklik de artıyor.)*
Doğrudan ve sistematik koordinasyon	Eş zamanlı değişimleri doğrudan ve sistematik koordine etme. Değişkenlerden birini birim birim artırarak diğer değişkenin değişimini gözlemleme. (*örn., Birim hacim artışında yükseklik artarak artıyor.)*
Değişim oranının nicelleştirilmesi	
Kabaca veya sezgisel nicelleştirme	Değişim oranının (hızının) değerini matematiksel bir gerekçelendirme sunmadan, sezgisel olarak kabaca ifade etme; grafikteki eğriliği yanlış veya eksik ifade etme, gösterme. (*örn., Yükseklik artışı gittikçe yavaşlamaktadır.)*
Miktar odaklı nicelleştirme (örn., hacim)	Ölçülmesi kolay tek bir niceliğe odaklanma; değişkenlerden sadece birine odaklanıp bu değişkenin ardışık aralıklardaki değişimini toplamsal olarak karşılaştırma, (*örn., Eşit hacim aralıklarında, yükseklikteki değişimin gittikçe arttığı gözlemlenmektedir.)*
Yoğunluk odaklı nicelleştirme (örn., debi, hız)	İki niceliğin birlikte yorumlanmasıyla oluşan yeni ve soyut bir niceliğe odaklanma; değişkenlerden birini birim birim değiştirip (bu birimin sonsuz küçük değerler alabileceğinin farkında olarak) diğerindeki değişime odaklanma; birlikte değişimde ortaya çıkan değişim oranını (hızını) yeni bir nicelik olarak görebilme. (*örn., Birim hacim artışında, yükseklik azalan oranda artmaktadır.)*

Yöntem

Bağlam ve Katılımcılar

Bu çalışma, temsil geçiş süreçlerini ve grup ile öğrenme süreçlerini temel alarak oluşturulmuş ve kovaryasyonel düşünme becerilerinin gelişimini hedefleyen bir öğretim deneyinin ilk aşamasını oluşturmaktadır. Bu aşamada, öğretmen adaylarından çeşitli şişelere sabit oranda su doldurulması esnasında yükseklik ve hacim arasındaki ilişkinin nasıl olduğunu grafik ile temsil etmeleri ve her biri için yazılı matematiksel açıklamalar sunmaları beklenmiştir. Bu nedenle, çalışmanın amacı ve veri toplama süreçleri göz önünde bulundurulduğunda bu çalışma bir bütüncül durum çalışması desenine sahiptir. Veriler, bir devlet üniversitesinin İlköğretim

Matematik Öğretmenliği Bölümü'nün son sınıfında öğrenim gören 101 öğretmen adayından elde edilmiştir. Fakat bir katılımcı Türkçe veya İngilizce olarak hiçbir yazılı açıklama sunmadığı için veriden hariç tutulmuştur. Bu nedenle, araştırmaya tam olarak 100 öğretmen adayı katılmıştır. Katılımcı seçiminde amaçlı örneklem yöntemi kullanılmıştır. Bu doğrultuda, öğretmen adayları, lisans programı kapsamında aldıkları ders içerikleri düşünülerek son sınıftan seçilmiştir. Özel olarak, öğretmen adaylarının fonksiyonlar, limit, türev, integral gibi değişim oranının yorumlanmasını gerektiren kavramının önemli yer tuttuğu *Genel Matematik, Analiz, Analitik Geometri* ve *Fizik* gibi dersleri tamamlamış olmaları dikkate alınmıştır.

Verilerin Toplanması ve Analizi

Verilerin toplanmasında iki niceliğin eş zamanlı değişimini içeren bir dinamik fonksiyonel durumun yer aldığı şişe-grafik etkinlikleri kullanılmıştır (Carlson vd., 2002; Swan, 1985; Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2019). Bu etkinlik, uluslararası alan yazında kovaryasyonel düşünme becerilerinin araştırılmasında sıklıkla kullanıldığı ve gerçek yaşamla yakından ilişkili olduğu için tercih edilmiştir. Ek olarak, araştırmacılar öğrencilerin ve öğretmenlerin değişim oranının anlamlandırırken yaşadıkları zorlukları kinematik bağlamlar (hız-zaman) dışında dinamik fonksiyonel durumlar üzerinde çalışılmaması ile ilişkilendirdikleri için (Herbert ve Pierce, 2012; Wilhelm ve Confrey, 2003) bu çalışmada kinematik bağlam içermeyen bir dinamik fonksiyonel durum (yükseklik-hacim) seçilmiştir.

Veri toplama etkinliğinin oluşumu için öncelikle Yemen-Karpuzcu vd.'nin (2017) kullandığı 8 farklı şişe içeren bir etkinlik kullanılarak 32 öğretmen adayıyla bir pilot çalışma yapılmıştır. Pilot çalışmada öğretmen adaylarından sabit oranda su ile doldurulurken her bir şişe için yükseklik ile hacim arasındaki ilişkinin nasıl olacağını grafik üzerinde çizmeleri ve iki değişken arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak yazılı biçimde açıklamaları istenmiştir. Öğretmen adayları, tüm çizimleri ve yazılı açıklamaları tamamladıktan sonra etkinliği araştırmacıya teslim etmiştir. Bu pilot uygulama yaklaşık 50 dakika sürmüştür. Fakat pilot çalışmada öğretmen adaylarının şişelerin tümü için detaylı açıklama yazma konusunda zorluk yaşadıkları gözlemlenmiştir. Bu zorluklar nedeniyle yazdıkları açıklamaların uzunluk ve kalitesinin düştüğü tespit edilmiştir. Bu nedenle, pilot çalışma sonrasında iki şişenin ve grafiğinin kullanılmasına karar verilmiştir. Sonuç olarak, bu çalışmada öğretmen adaylarının iki niceliğin eş zamanlı değişimini içeren dinamik fonksiyonel durumu nasıl yorumladığını anlamak için Şekil 1'de verilen iki şişe kullanılmıştır.

Şekil 1. Veri toplama aracındaki dinamik fonksiyonel durum etkinliğinde yer alan şişeler

Birçok farklı özellikte ve görünümde resmedilen şişe örnekleri içinde bu iki şişe şu nedenlerden dolayı tercih edilmiştir: (i) şişelerin üç farklı bölüme sahip olmaları; (ii) silindirik ve silindirik olmayan bölümler içermeleri; (iii) görsel olarak farklı olmaları (örn., Şişe A'nın tüm bölümleri köşeli görünürken, Şişe B’nin alt kısmı eğrisel görünmektedir). Şişelerin seçilmesinde kullanılan ölçütler, kovaryasyonel düşünme kapsamında yapılan çalışmalar göz önünde bulunularak belirlenmiştir. Örneğin, Şişe A özellikle iki farklı silindirik bölüme sahip olduğu için seçilmiştir. Çünkü Şişe A’daki iki silindirik bölüm grafik temsili ile ifade edilirken grafikteki doğrusal ilişkilerde eğimin değişim oranını doğru yansıtarak çizilmesi gerekmektedir. Yine şişelerdeki eğrisel ve köşeli görüntüler öğretmen adaylarının değişkenler arasındaki kovaryasyonel ilişki yerine şişelerin şekline odaklanıp odaklanmadıklarını anlamak için tercih edilmiştir.

Pilot çalışmadan sonra son hali verilen şişe-grafik etkinliği çalışmanın esas katılımcıları olan 100 öğretmen adayına uygulanmıştır. Bu süreçte öğretmen adaylarından iki şişeye ait yükseklik-hacim grafiğini veri toplama aracında ayrılan bölümlerde ayrı ayrı çizmeleri istenmiştir. Ek olarak, öğretmen adayları her bir durum için yükseklik ve hacim ilişkisi ile ilgili matematiksel açıklamalarını detaylı olarak yazmışlardır. Bu yazılı açıklamalar sayesinde öğretmen adaylarının bir dinamik fonksiyonel durum içinde iki değişken arasındaki değişimi nasıl yorumladıkları tespit edilebilmiştir ve böylece kovaryasyonel düşünme ile ilgili yorumlama biçimlerine de detaylı anlamda erişilmiştir. Diğer taraftan, öğretmen adaylarının yazılı açıklamalarının ve çizdikleri grafiklerin incelenmesinden sonra çizilen grafiklerdeki hataların ve eksikliklerin farklı tiplerine göre belirlenen 8 kişi ile klinik görüşme yapılmıştır. Klinik görüşme yapmak için seçilen katılımcılar her iki şişe için de graifkleri hatalı çizen/yorumlayan kişiler arasından seçilmiştir. Hangi öğretmen adaylarıyla görüşüldüğü ve görüşülen öğretmen adaylarının çizdikleri grafiklerin özellikleri Tablo 3’te sunulmuştur. Öğretmen adaylarının gerçek isimleri yerine takma isimler kullanılmıştır.

Tablo 3.

Görüşme Yapılan Öğretmen Adaylarının Çizdiği Grafik Temsillerinin Özellikleri

Çizilen grafik temsillerinin özellikleri		Görüşülen öğretmen adayı
Şişelerdeki üç bölümü dikkate alanlar	– Değişkenler arasında doğrusal olmayan ilişkileri sanki doğrusal bir ilişki varmış gibi çizmişlerdir.	Hakan Sema
	– Bağımlı ve bağımsız değişkenlerin rollerini yer değiştirerek hatalı grafikler oluşturmuşlardır.	Zeynep Gizem
	– Değişkenler arasındaki ilişkiyi *artan/azalan oranda artan* olacak şekilde çizmek yerine *artan/sabit/azalan oranda azalan* olacak şekilde grafik çizmişlerdir.	Merve Erkan
Şişelerdeki üç bölümü dikkate almayanlar	– Şişeleri olması gerekenden daha az (3’ten az) ya da daha fazla (3’ten fazla) bölüme ayırarak grafik çizmişlerdir.	Yasemin Selin

Tablo 3’te görüldüğü üzere farklı hata türlerinin her birinde iki katılımcı ile görüşülmüştür. Bunun nedeni ise Tablo 3’te her bir kategorideki iki katılımcının aynı hata kategorisinde farklı biçimlerde cevaplar sergilemiş olmalarıyla ilgilidir. Örneğin, Şekil 1’de verilen şişeleri olması gerekenden az veya daha fazla bölüme ayırarak grafik çizen öğretmen adaylarından Yasemin’in grafiği Şişe B için 4 bölüm içerirken, Selin’in Şişe A için çizdiği grafik iki doğrusal parçadan oluşan bir grafik olmuştur. Benzer şekilde, grafiklerde şişelerin silindirik olmayan kısımlarında değişkenler arasında doğrusal olmayan ilişkileri doğrusal olarak çizen Hakan ve Sema’nın da cevapları farklı nitelikte olmuştur. Hakan, Şişe A köşeli diyerek değişkenler arasındaki ilişkileri sürekli doğrusal resmedip, Şişe B için şişenin eğrisel kısmında doğrusal bir grafik çizmemiştir. Fakat Sema her iki şişede tüm bölümler için değişkenler arasındaki ilişkileri grafiklerde doğrusal olacak şekilde çizmiştir.

Klinik görüşmelerde verdikleri cevapların doğru veya yanlış olduğu söylenmeden katılımcılardan grafik çizerken değişkenler arasındaki ilişkileri nasıl ele aldıklarını tekrar açıklamaları istenmiştir. Görüşme esnasında, öğretmen adayının cevaplarına göre araştırmacı katılımcının düşünüşünü daha iyi açığa çıkarmak için çeşitli sorular yöneltmiştir. Örneğin, “Buna nasıl karar verdin?”, “ Bir arkadaşın senden farklı olarak bu grafiği şöyle çizmiş. Bu konuda ne düşünüyorsun?”, “İki farklı genişlikte dik silindir şeklinde şişe alalım. Bunların hacim-yükseklik grafiği nasıl olur?” ve “Biz bu şişeye sürekli su koyuyoruz ama senin grafiğinde hacim hep azalıyor diye yorumluyorum. Neden?” gibi sorular yöneltilmiştir. Bu sorular katılımcıların hatalarını düzeltmekten ziyade düşünsel süreçlerini daha iyi açığa çıkarma amacı güderek sorulmuştur. Görüşmeler seçilen her bir katılımcı ile bireysel olarak gerçekleştirilmiştir. Her bir görüşme ortalama 30 dakika sürmüştür. Görüşmelerin hepsi aynı ortamda gerçekleştirilmiştir ve kamera kaydına alınmıştır. Görüşmede edinilen veriler, veri çeşitlemesinin sağlanması, katılımcıların farklı düşünüşlerinin detaylarının anlaşılması ve yazılı verilerin daha açık hale getirilmesi amaçlarına hizmet etmiştir.

Verilerin analizinde öğretmen adaylarının çizdikleri grafik temsilleri ilk önce doğru ve yanlış olarak sınıflandırılarak frekans hesabı yapılmıştır. Doğru grafikler, Şişe A için silindirik kısımlardaki değişkenler arasındaki doğrusal ilişkiyi eğimleri koordine ederek yansıtan ve silindirik olmayan kısım için doğrusal olmayan ilişkiyi veren grafikler olarak belirlenmiştir. Benzer şekilde, Şişe B için de silindirik olmayan kısmı iki parça halinde değişkenler arasındaki ilişkileri doğru yansıtan ve silindirik kısımdaki doğrusal ilişkiyi ifade eden grafikler olarak ele alınmıştır. Diğer biçimlerde çizilen grafik temsilleri yanlış olarak kodlanmıştır. Bu doğrultuda şu dört grup altında frekans analizi yapılmıştır: (i) Şişe A grafik temsilini doğru çizen ve Şişe B grafik temsilini yanlış çizen, (ii) Şişe B grafik temsilini doğru çizen ve Şişe A grafik temsilini yanlış çizen, (iii) her iki şişe için de grafik temsillerini hatalı çizen, (iv) her iki şişe için de grafik temsillerini doğru çizen. Ardından, grafik temsillerindeki hatalar ve eksiklikler benzerliklerine ve sıklıklarına göre gruplanmıştır ve frekanslar her bir şişe için ayrıca hesaplanmıştır. Bu hataların/eksikliklerin neler olduğu ve olası nedenleri alan yazındaki çalışmalar ışığında belli temalar ve kodlar altında ele alınmıştır. Bu bağlamda, veriler, katılımcı adı, çizdiği grafik, yazılı açıklamaları ve verilecek kodlar biçiminde dört sütunun olduğu bir dokumana aktarılmıştır. Araştırmacı dokumanda yer alan tüm verileri güvenirliği sağlamak için belli aralıklarla toplamda üç kez kodlamıştır. Ek olarak, başka bir araştırmacı verilerin rastgele seçilen %30’luk bir kısmını (30 katılımcının cevapları) belirlenen kod ve temalar altında bireysel olarak kodlamıştır. İki araştırmacının kodları arasında grafiklerin doğru yanlış çiziminin kodlanmasında %100’lük bir ortak güvenirlik elde edilirken, grafiklerin hata tiplerinin gruplanmasında %85’in üzerinde bir ortak güvenirlik elde edilmiştir. Bu noktada, iki araştırmacı uzlaşılamayan durumlar için bir araya gelerek tartışma yaptıktan sonra kodlar ile ilgili ortak bir kanaate varmışlardır.

Bulgular

Bulgularda öncelikle öğretmen adaylarının dinamik fonksiyonel durumlar için grafik temsili üretme performansları hangi şişelere ait grafikleri ne derece doğru çizebildiklerinin frekansları ve verileri yorumlanarak açıklanmıştır. Akabinde, öğretmen adaylarının ürettikleri grafik temsillerinde sıklıkla karşılaşılan hataların ve eksikliklerin neler olduğu çizilen grafikler, yazılı açıklamalar ve görüşme verileri ile örneklendirilerek yorumlanmıştır.

Öğretmen Adaylarının Grafik Temsillerini Üretme Performansları

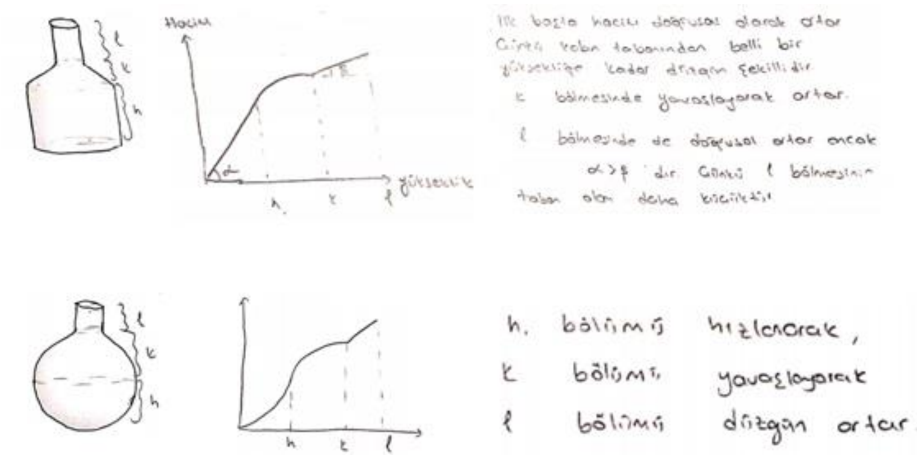
Öğretmen adaylarının şişeler için oluşturdukları grafik temsillerindeki performansları Tablo 4'te gösterilmiştir. Bu bakımdan, Tablo 4'te öğretmen adaylarının hangi şişenin/şişelerin grafiğini/grafiklerini doğru çizdikleri veya yanlış çizdikleri sayısal olarak verilmiştir.

Tablo 4.

Öğretmen Adaylarının Grafik Temsillerini Üretme Performansları

Çizilen grafik temsillerinin doğruluk durumları	Kişi sayısı
Şişe A ve Şişe B grafik temsillerinin ikisi de doğru	6
Şişe A grafik temsili doğru–Şişe B grafik temsili yanlış	5
Şişe B grafik temsili doğru–Şişe A grafik temsili yanlış	19
Şişe A ve Şişe B grafik temsillerinin ikisi de yanlış	70
Toplam	100

Tablo 4'e göre, sadece 6 öğretmen adayının her iki şişe için de doğru grafik oluşturduğu tespit edilmiştir. Her iki grafiği de doğru yapan öğretmen adaylarının yazılı cevapları, onların değişim oranı kavramının farkında olduklarını ve diğer öğretmen adaylarına oranla değişkenler arasındaki ilişkiyi daha iyi koordine etmeye çalıştıklarını göstermiştir. Her iki grafiği de doğru çizen öğretmen adayı Nagihan'ın yazılı açıklamaları ve çizdiği grafikler Şekil 2'de sunulmuştur.



Şekil 2. Her iki şişe için de doğru çizilmiş grafik temsil örnekleri

Öğretmen adayı Nagihan'ın grafikler için sunduğu açıklamalar onun her iki şişedeki üç farklı bölümü fark ettiğini yansıtmaktadır. Ayrıca öğretmen adayı, Şişe A için silindirik kısımlarda ortaya çıkacak doğrusal ilişkileri ayırt etmesine ek olarak grafikte oluşan doğruların eğimlerinin farklılığını da uygun biçimde koordine edebilmiştir. Bu farklılığın sebebi olarak şişenin silindirik kısımlarının taban alanlarındaki farklılığa odaklanmıştır. Nagihan'ın Şişe A için yaptığı açıklamalarda yüksekliğin bağımsız değişken olduğu açıkça belirtilmese de öğretmen adayı hacimdeki değişimi yüksekliğin bir fonksiyonu olarak ele almıştır. Öğretmen adayı açıklamalarında matematiksel anlamda uygun terimlere yer vermese bile "yavaşlayarak" ve "hızlanarak" ifadeleri ile değişim oranının niteliğini (örn., artan oranda/azalan oranda) bir değişkenin ardışık aralıklardaki değişimini karşılaştırarak açıklamaya çalışmıştır.

Diğer taraftan, 70 (%70) öğretmen adayı her iki şişe için de yanlışlar ve eksikler içeren grafik temsilleri oluşturmuştur. Bu durum, öğretmen adaylarının iki değişkenin eş zamanlı değişimini içeren dinamik fonksiyonel durumları grafik temsiline dönüştürmekte zorlandıklarını ve bu süreçte çeşitli hatalar yaptıklarını göstermiştir. Son olarak, öğretmen adaylarının %24'ü şişelerden birinin grafik temsilini doğru çizerken diğer şişenin grafik temsilini yanlış çizmiştir. Şişe A'nın grafik temsilini doğru çizip Şişe B'nin grafik temsilini yanlış çizen 5 kişi varken tam tersini yapan öğretmen adayı sayısının 19 kişi olduğu dikkat çekmektedir. Bu noktada, Şişe B için çizilen grafik temsillerindeki doğru sayısının Şişe A için çizilen grafik temsillerindeki doğru sayısından neden daha fazla olduğunu anlamak için öğretmen adaylarının çizdikleri grafikler ve yazılı açıklamaları detaylı olarak karşılaştırmalı biçimde incelenmiştir. Yapılan inceleme, Şişe B için çizilen grafik temsillerinin bazılarında cevapların şişenin şekline odaklanılarak sezgisel ve kabataslak biçimde verildiğini ortaya çıkarmıştır. Bu durumun detayları grafik temsillerindeki eksikliklerin açıklandığı alt başlıklar altında örneklendirilerek ele alınmıştır.

Öğretmen Adaylarının Çizdiği Grafik Temsillerindeki Hatalar ve Eksiklikler

Öğretmen adaylarının her bir şişeye ait yükseklik ve hacim arasındaki ilişkiyi göstermek için çizdiği grafik temsillerinde tespit edilen hatalar/eksiklikler Tablo 5'te sunulmuştur. Bu temsillerdeki hatalar ve eksiklikler ayrı başlıklar altında öğretmen adaylarının yazılı açıklamaları, çizdikleri grafik ve şişe temsilleri ve görüşmede elde edilen veriler kullanılarak açıklanmıştır.

Tablo 5.

Öğretmen Adayların Grafik Temsillerinde Rastlanan Hatalar ve Eksiklikler

Grafik temsillerindeki hatalar/eksiklikler	Kişi Sayısı	
	Şişe A	Şişe B
Değişkenler arasındaki farklı doğrusal ilişkiler için eğimleri koordine edememe	51	*UD**
Değişkenler arasındaki doğrusal olmayan ilişkileri doğrusal biçimde temsil etme	44	20
Değişkenlerin rollerini değiştirerek temsil etme	11	27
Değişkenler arasındaki ilişkiyi artan yerine azalan şekilde temsil etme	10	14
Değişkenler arasındaki ilişkiyi verilen dinamik fonksiyonel durumun gerektirdiğinden daha az sayıda bölüm içerecek biçimde temsil etme (3'ten az sayıda)	16	22
Değişkenler arasındaki ilişkiyi verilen dinamik fonksiyonel durumun gerektirdiğinden daha fazla sayıda bölüm içerecek biçimde temsil etme (3'ten fazla sayıda)	0	11

Not: **UD*, belirtilen temanın Şişe B için *uygulanabilir değil* anlamına gelir. Bunun nedeni, Şişe B'nin değişkenler arasındaki ilişkinin doğrusal olmasına neden olan sadece tek silindirik parça içermesidir. Tablodaki sayılar katılımcı sayısı 100 olduğundan aynı zamanda yüzdelikleri de ifade etmektedir.

Değişkenler arasındaki farklı doğrusal ilişkiler için eğimleri koordine edememe

Şişe A iki farklı silindirik bölüm içermektedir. Bu iki silindirik bölümün altta olanın taban alanı üsttekinden daha geniştir. Bu farklılık, şişede birim yükseklikteki hacim miktarını silindirik bölümlerde farklılaştırmaktadır. Bu durum da silindirik bölümler için çizilen doğrusal ilişkilerin eğimlerinin farklı olmasına neden olmaktadır. Bu yüzden, Şişe A için çizilen doğru bir yükseklik-hacim grafik temsilinde belirtilen eğimlerin uygun biçimde koordine edilmesi gerekmektedir. Fakat öğretmen adaylarının %51'i Şişe A'nın grafik temsilinde silindirik bölümler için değişkenler arasındaki ilişkinin doğrusal olması gerektiğini fark etmesine rağmen bu ilişkileri temsil ederken eğimlerdeki farklılığı koordine edememiştir. Bu durumu daha iyi açıklamak için bir öğretmen adayının çizdiği grafik temsil örneği Şekil 4-a'da sunulmuştur.

(a) Şişe A'nın silindirik bölümlerindeki doğrusal ilişkilerin eğimlerini koordine edememe

(b) Şişe A'nın silindirik olmayan bölümü için değişkenlerin doğrusal olmayan ilişkisini doğrusal çizme

Şekil 4. Şişe A için çizilen ve farklı hata kategorilerinde kodlanan yanlış grafik temsil örnekleri

Bu öğretmen adayı, çizdiği grafik için şu şekilde yazılı açıklama yapmıştır: "Birinci bölge bitene kadar doğrusal bir hacim artışı göstereceğini düşünüyorum. İkinci bölgede şişe gittikçe daralıyor. III. Bölgede de aynı ilk bölmedeki gibi düzenli artış olacak." Öğretmen adayı her ne kadar uygun matematiksel terimler kullanarak değişkenler arasındaki ilişkiyi ifade edemese de hem çizimi hem de açıklamaları onun şişenin silindirik bölümlerinde değişkenler arasındaki doğrusal ilişkinin varlığının farkında olduğunu göstermektedir. Diğer önemli bir nokta da öğretmen adayının şişedeki doğrusal ilişki içermeyen ikinci bölümü fark edebilmiş olmasıdır. Fakat yazılı açıklamalar, öğretmen adayının değişkenleri birbirinden bağımsız iki fonksiyonun bileşeni gibi ifade ettiğini göstermektedir. Çünkü açıklamalarında "doğrusal bir hacim artışı" ifadesi hacmin yükseklik ile ilişkilendirilmesi konusunda netlik içermemektedir. Özellikle şişenin üçüncü bölümü için yaptığı açıklamada düzenli artış gösterecek değişkenin ya da değişkenlerin ne olduğu dahi belirtilmemiştir. Benzer şekilde, birçok öğretmen adayının "Şişe A'nın ilk ve üçüncü bölümü için aynı doğruyu çizdim" ve benzeri yazılı açıklamaları onların grafik çizerken izlediği yolu net biçimde ortaya çıkarmıştır. Sonuç olarak, bu kategoride kodlanan grafik çizimlerini yapan öğretmen adayları Şişe A'nın silindirik kısımlarındaki farklılığa ve bu farklılığın değişim oranını ifade etmede yarattığı farka değil sadece şişede silindirik bir bölümün var olup olmamasına odaklanmışlardır.

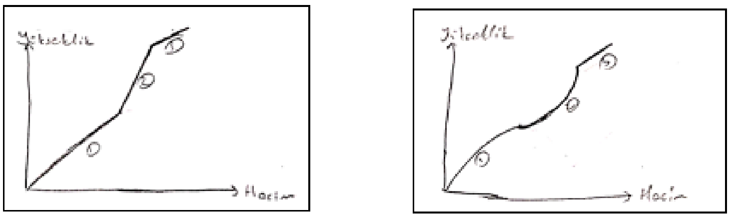
Değişkenler arasındaki doğrusal olmayan ilişkileri doğrusal biçimde temsil etme

Çalışmada ele alınan iki şişe de silindirik bölümlere ek olarak silindirik olmayan bölümler içermektedir. Örneğin, Şişe A'nın orta kısmı kesik bir koniye benzerken, Şişe B'nin alt iki parçasının bütünü bir küre şekline benzemektedir. Bu şişe bölümlerinde ele alınan yükseklik ve hacim değişkenleri arasındaki ilişkiler silindirik bölümlerdeki ilişkilere göre farklılıklar gösterir. Bu nedenle, öğretmen adaylarından her iki şişede de silindirik olmayan bölümlerdeki değişkenler arasındaki ilişkilerin doğrusal olmadığını fark etmeleri beklenmiştir. Fakat Şişe A için çizilen grafiklerin %44'ünde şişenin silindirik olmayan bölümü için yükseklik ve hacim arasındaki değişime ait grafiğin doğrusal çizildiği tespit edilmiştir. Öğretmen adayları, genel olarak Şişe A'nın ikinci bölümünün yüzeyini düzgün bir geometrik şekil olarak (ikizkenar yamuk gibi) algılamış ve birim yükseklikteki suyun artış oranını dikkate almamışlardır. Birim yükseklikteki hacim analizini 1V-3V-5V-7V gibi yazdıkları ifadelerdeki 2V'lik farklara odaklanarak yapmışlardır ve bu hacimler arasındaki artışların 2V şeklinde sabit olduğunu dile getirmişlerdir. Bu sabitliği referans alarak Şişe A'nın silindirik olmayan bölümünde yükseklik hacim arasındaki ilişkinin doğrusal olduğunu iddia etmişlerdir. Bu noktada, bazı öğretmen adaylarının açıklamaları ise değişkenleri isimlendirme ve aralarındaki ilişkiyi ifade etmede çok

EĞİTİMDE NİTEL ARAŞTIRMALAR DERGİSİ
Journal of Qualitative Research in Education
Volume 8 / Issue 2, 2020
Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - ENAD
Journal of Qualitative Research in Education - JOQRE

yetersiz bulunmuştur. Örneğin, Şekil 4-b'yi çizen Sema şu açıklamaları yapmıştır: "Yükseklik arttıkça ilk başta şişenin kıvrımına gelene kadar normal bir atış sergilemekte. Sonra hacim azalmakta yükseklik artış göstermektedir. En son yükseklik daha hızlı artmakta hacim ona göre daha az artmaktadır." Bu açıklamalarda öğretmen adayı Sema şişenin silindirik bölümünde yükseklik arttıkça hacme her ne kadar atıf vermese de hacmin normal artış sergilediğini belirtmiştir. Görüşmede "normal" ne demek diye sorulunca öğretmen adayı değişkenler arasındaki ilişkinin doğrusal olduğunu kastettiğini belirtmiştir. Sema'nın "hacim azalmakta yükseklik artış göstermektedir" ifadesi Şişe A'nın silindirik olmayan bölümü için yazılmıştır. Bu açıklama, öğretmen adayının hacim ve yüksekliği sanki başka bir değişkenin fonksiyonu gibi ayrı ayrı ele aldığını göstermektedir. Bu da onun değişkenleri doğrudan değil dolaylı bir yoldan koordine ettiğine işaret etmektedir. Ayrıca bu ifade matematiksel olarak da doğru değildir. Çünkü hacim azalmamaktadır; aksine azalan oranda artış göstermektedir. Bu gibi ifadeler, öğretmen adaylarının değişkenler arasında doğrusal olmayan ilişkileri doğrusal ilişkilerden ayırt edememelerine ek olarak matematiksel dili kovaryasyon ve değişim oranı temelinde açıklamada da önemli sıkıntılar yaşadıklarını göstermiştir.

Benzer hatalara Şişe B için çizilen grafik temsillerinin %20'sinde de rastlanmıştır. Bu oranın Şişe A'daki aynı hata tipinin oranından düşük olmasının, öğretmen adaylarının çoğunun şişelerin şekline odaklanarak değişkenler arasındaki ilişkinin doğrusal olup olmamasına karar vermeleri ile ilişkili olduğu görülmüştür. Çünkü bazı öğretmen adayları, Şişe A için grafik temsilini tüm parçaları doğrusal ilişki içerek şekilde çizerken, Şişe B'nin alt iki parçası eğrisel bir şekle sahip olduğundan bu parçalar için oluşturulan grafikteki çizimin doğrusal olamayacağını belirtmişlerdir (örn., Şekil 5).



(a) (b)

Şekil 5. Hakan'ın (a) Şişe A için çizdiği ve (b) Şişe B için çizdiği grafik temsilleri

Şekil 5'te görüldüğü üzere, klinik görüşme yapılan öğretmen adayı Hakan, Şişe A'da ikinci kısım için değişkenler arasındaki ilişkiyi grafikte doğrusal çizerken, Şişe B'nin silindirik olmayan kısımları için değişkenlerin ilişkisini grafikte eğri biçiminde çizmiştir. Görüşmede, öğretmen adayı Hakan ile araştırmacı arasında şöyle bir diyalog ortaya çıkmıştır:

Araştırmacı	Şişe B için çizdiğin grafikte (Şekil 5-b) doğrusal ilişkiyi sadece üçüncü parçada çizmişsin ama Şişe A için tüm parçaları grafikte doğrusal olarak temsil etmişsin (Şekil 5-a). Bu farklılığın nedenini açıklayabilir misin?
Hakan	Ben şişeye dikkat ettim. Şişe B'nin yuvarlak olması ilişkinin doğrusal olamayacağını düşündürdü bana. Fakat Şişe A da hep böyle çokgen gibi düz. O yüzden artışlar düzgün olur dedim.
Araştırmacı	Şişe B için eğri çizdiğin kısımları aynı şekilde çizmemişsin. Buna nasıl karar verdin?
Hakan	Orada ben yine küreye baktım. Bir parçası yukarı doğru genişliyor bir parçası ise

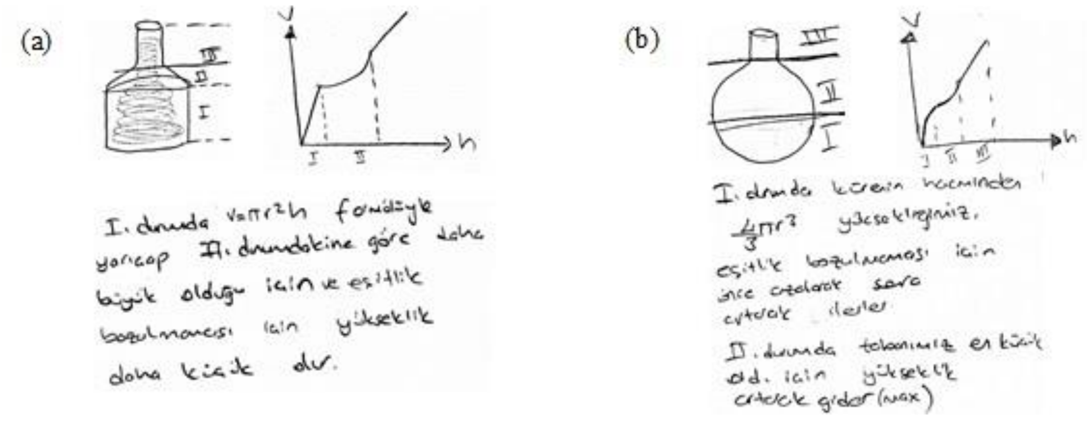
ENAD ONLINE
EĞİTİMDE NİTEL ARAŞTIRMALAR DERGİSİ
Journal of Qualitative Research in Education
Cilt 8 / Sayı 2, 2020
Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - ENAD
Journal of Qualitative Research in Education - JOQRE

	yukarı doğru daralıyor. O yüzden aynı olmaz grafikleri dedim. Şişenin şekli değişince hacmin değişimi de etkileniyor.
Araştırmacı	Şunu da merak ediyorum. Şişe B'nin birinci ve ikinci kısmını farklı çizdin ya ona nasıl karar verdin?
Hakan	Bir dakika düşüneyim bir de yazdıklarımı okuyayım. [Yazılı açıklamaları: Şişeyi üç parçaya ayırdım. (1) parçada yükseklik arttığında hacim de artıyor ama şişe şeklinden dolayı doğru orantılı değil. (2) parçasında ise yükseklik ve hacim artıyor ama yükseklik arttıkça hacmin artışı daha fazla oluyor] Hmm. Hacmin daha hızlı arttığı yeri böyle çizmişim. Bu şekilde (/) olunca artarak artar diye hatırlıyorum. İki kez artma dediğimiz için bu durumda daha hızlı artış oluyordu diye hatırlıyorum.

Hakan'ın klinik görüşmede söyledikleri onun değişkenler arasında kurduğu ilişkiye şişelerin görünüşünü dikkate alarak karar verdiğini göstermektedir. Ayrıca Hakan'ın hafızasını yoklayarak "artarak artan" biçiminde belirttiği değişim oranına dair ifade, onun zihinde değişim oranının dinamik bir yapıdan ziyade ezberlenmiş statik bir görüntü ile yer aldığına işaret etmiştir. Bu gibi cevaplar, bazı öğretmen adaylarının Şişe B için çizilen ve görsel olarak doğru grafik kategorisinde kodlanan grafik temsillerinde değişim oranının, kabaca ve sezgisel bir nicelleştirme içeriğiyle yorumlanmaya çalışıldığını ortaya çıkarmıştır.

Değişkenlerin rollerini değiştirerek temsil etme

Dinamik fonksiyonel durum etkinliğinde bağımlı ve bağımsız değişkenlerin sırasıyla hacim ve yükseklik olduğu grafikte x-eksenine yükseklik y-eksenine de hacim koyularak ifade edilmiştir. Ama Şişe A için grafik temsilini yanlış çizen öğretmen adaylarının %11'i Şişe A'nın ikinci bölümünde yükseklik ve hacim arasındaki ilişkinin doğrusal olmadığını anlamasına rağmen birim yükseklikte hacmin artış oranında bir azalma olduğunu göstermek yerine artma (/) var gibi bir çizim yapmıştır (örn., Şekil 6-a).



Şekil 6. Zeynep'in değişkenlerin rollerinin değiştirilerek oluşturduğu grafikler

Örneğin, Şekil 6'daki grafikleri çizen Zeynep ile yapılan klinik görüşmede, araştırmacı ve Zeynep arasında şu şekilde bir diyalog oluşmuştur:

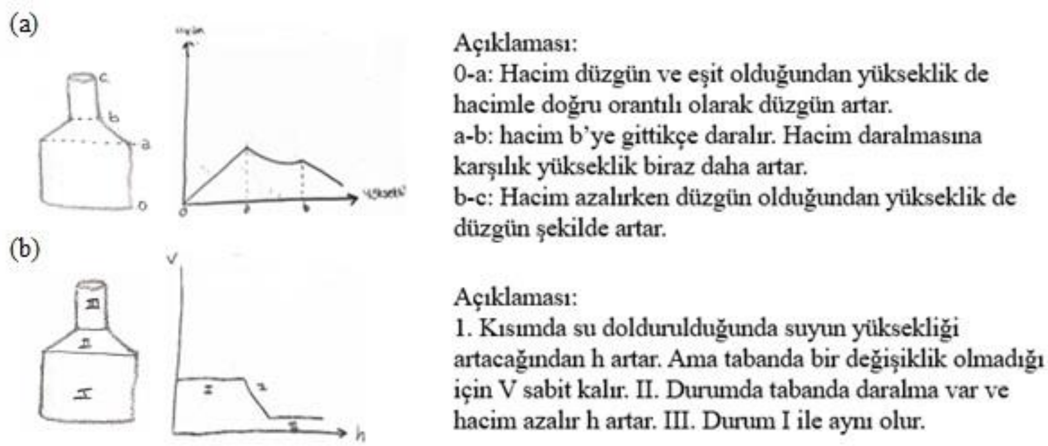
Araştırmacı	Şişe A için çizdiğin grafiğe nasıl karar verdin?
Zeynep	Şişeye baktım ve 3 bölüm aldım. Ben hacim formülünü düşündüm. Sonra düz olan kısımların doğrusal olması lazım dedim. Tabi şişenin ortası düz değil. Orada artışlar farklı olacak.
Araştırmacı	Hacim formülünü nasıl uyguladın?
Zeynep	Formülle şuna baktım. Hacim hep aynı miktar olduğunda yükseklik ne olacak? Hacim hep aynı olacağı için yarıçap artınca yükseklik daha az yarıçap azalınca yükseklik daha fazla olması gerekiyor.
Araştırmacı	Yükseklik neye göre azalacak artacak anlamadım. Biraz daha açık anlatır mısın?
Zeynep	Şimdi mesela burada hacim hep 120 ml olsun. Yarıçap 2 ve pi sayısı 3 olsa yükseklik 10 çıkıyor. Yarıçap 1 olunca yükseklik 40 oluyor mesela. Yani yarıçap azalınca aynı hacme karşılık gelen yükseklik daha çok oluyor.
Araştırmacı	Hacmi eşit miktarda arttırıp yüksekliğin nasıl değiştiğini mi inceledin?
Zeynep	Evet, aynen öyle yaptım.

Öğretmen adayı Zeynep ile yapılan klinik görüşme, onun değişim oranının yorumlanmasını etkileyen Şişe A'daki üç farklı bölümü de fark ettiğini açıkça göstermektedir. Ayrıca Zeynep iki değişken arasındaki ilişkiyi yarıçap ile yani ikincil bir değişken ile dolaylı yoldan koordine etmeye çalışmıştır. Diğer taraftan, öğretmen adayı açıklamalarında "aynı hacim miktarı" ve "hacim hep 120 ml olsun" gibi ifadeler kullanmıştır. Bu ifadeler onun hacim değişkenini birim birim artırarak yükseklik değişkeninde oluşan değişime odaklandığını göstermektedir. Fakat bu açıklamalarda asıl önemli nokta onun bağımsız değişken olarak hacim üzerinden gitmesine rağmen grafikte bağımsız değişken olarak yüksekliğe yer vermesidir. Yani, Zeynep iki değişken arasındaki ilişkiyi değişkenlerin rollerini değiştirerek yorumlamaya çalışmıştır. Sonuç olarak da grafiklerde bağımsız değişkenin değişimini bağımlı değişkenle beklenenden farklı biçimde koordine etmiştir.

Benzer sıkıntılara Şişe B'nin grafik temsillerinin de %27'sinde rastlanmıştır (örn., Şekil 6-b). Şişe B için bu oranın daha fazla olmasının nedeni bu şişede değişkenler arasındaki doğrusal olmayan ilişkinin şişenin şeklinden dolayı daha fazla resmedilmesinin gerekliliğiyle ilgilidir. Bu öğretmen adaylarının değişkenler arasındaki ilişkiyi yorumlarken bağımlı ve bağımsız değişkenleri uygun şekilde tespit edemediği görülmüştür. Diğer bir deyişle, bu öğretmen adayları bağımlı ve bağımsız değişkenleri yer değiştirerek kovaryasyonel ilişkiyi açıklamaya çalışmışlardır. Bu yüzden de birim yükseklikteki hacim değişimini incelemeyi gerektiren bir grafikte, birim hacimdeki yükseklik değişimlerini yansıtmaya çalışmışlardır.

Değişkenler arasındaki ilişkiyi artan yerine azalan şekilde temsil etme

İçine sürekli olarak su doldurulan iki şişede (Şişe A ve Şişe B) yükseklik artışı hacimde de artışı otomatik olarak sağlayacaktır. Fakat önemli olan değişkenlerden birindeki değişimin diğer değişkendeki artışı nasıl etkilediğidir. Bu artış, şişelerin birim yüksekliğine karşılık gelen hacim miktarına paralel olarak artan oranda, azalan oranda veya sabit oranda gerçekleşebilir. Fakat öğretmen adaylarının çizdikleri grafik temsilleri incelendiğinde, Şişe A için çizilen grafik temsillerinin %10'u içine sürekli su eklenen bir şişede yükseklik artmasına rağmen hacmin azalacağını veya sabit kalabileceğini resmetmiştir. Aynı tip hatalara Şişe B için çizilen grafik temsillerinin %20'sinde de rastlanmıştır. Bu durumun bazı örnekleri Şekil 7'de sunulmuştur. Bu örneklerde öğretmen adaylarının yaptıkları açıklamalar incelendiğinde, şişeyi üç bölüme ayırdıkları ve grafiği de bu doğrultuda çizmeye çalıştıkları görülmektedir.



Şekil 7. Değişkenler arasındaki ilişkinin artan yerine azalan yorumlandığı grafik temsil örnekleri

Şekil 7-a'daki grafiği çizen öğretmen adayının açıklamaları yükseklik ve hacmi birbirinden bağımsız iki değişken gibi yorumladığına işaret etmektedir. Şişenin ikinci kısmında kabın daralmasına atıf yapan öğretmen adayı, hacmin bu kısımda azalacağını yüksekliğin ise artacağını iddia etmiştir. Ayrıca öğretmen adayının şişenin en uçtaki silindirik bölümü için de hacmin şişenin daralmasına paralel olarak azaldığını belirtmiş olması, onun "*birim yükseklikteki hacim miktarına*" değil "*birim yükseklikte hacimdeki değişim miktarına*" odaklandığını göstermiştir.

Bir öğretmen adayıyla yapılan klinik görüşme bahsi geçen çıkarımları doğrular nitelikte olmuştur. Öğretmen adayı (Merve) ve araştırmacı arasında şu şekilde bir diyalog oluşmuştur:

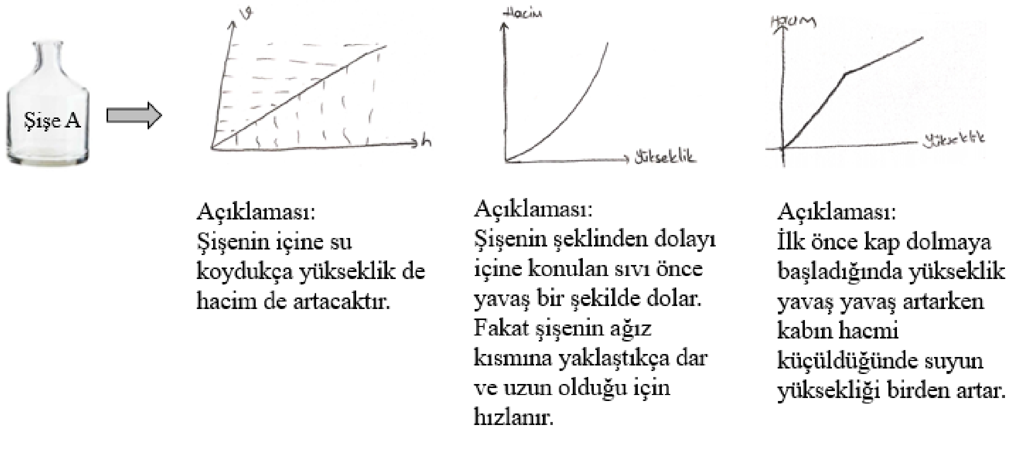
Araştırmacı	Bu grafiği (Şekil 7-a) nasıl çizdiğini bana daha detaylı açıklayabilir misin?
Merve	Hocam ben ilk olarak şişenin altına baktım. [Oraya] 0-a aralığı dedim. Orada hacim düzgün.
Araştırmacı	Hacim düzgün ne demek tam olarak?
Merve	Yani, şekil düzgün. Silindir gibi. Her yerinde hacim aynı oluyor. O yüzden yükseklik de içine her seferinde aynı hacim girince düzgün bir biçimde artacak.
Araştırmacı	İkinci kısmı neden doğrusal çizmedin mesela?
Merve	Şişe artık bozuldu. Eskisi gibi hacim aynı olmaz. Daha az hacim girecek sürekli.
Araştırmacı	Neden?
Merve	Mesela aşağı kısımda bir yükseklik 2 bardak su alırken biraz üstünde aynı yükseklik 1 bardak su alacak. Öyle olunca hacim azalacak ama düzgün değil çünkü şekil düzgün değil.
Araştırmacı	Son kısmı nasıl yaptın? Ben anlamadım ilk kısımda doğrusal grafik pozitif eğimli son kısımda negatif eğimli olmuş. Neden?
Merve	Kap artık çok daraldı. Hacim çok çok azaldı ama yükseklik artmaya devam ediyor. Hacim düzgün azalırken yükseklik düzgün artacak.

Yukarıdaki diyalogdan da anlaşılacağı üzere, birim yüksekliğe düşen hacim miktarı her ne kadar şişenin daralan kısmında azalsa da grafikte y-ekseni hacmi ifade ettiğinden bu azalış aslında azalan oranda hacim artışına denk gelmektedir. Fakat y-ekseni hacim değil de "birim yükseklikteki hacim miktarı" olsaydı azalan ilişkiden bahsedilebilirdi. Öğretmen adayı bağımlı değişkende "hacim" veya "birim yükseklikteki hacim miktarı" olmasının aynı durumu ifade edeceğini düşünerek çizdiği grafik temsilinde mantıksal olarak büyük bir hata yapmıştır. Bunun sonucu olarak, içine su doldurulan ve hiçbir yerinden suyun boşalmadığı bir şişede yüksekliğin artışına rağmen hacmin azalacağını iddia etmiştir.

Şekil 7-b'deki grafiği çizen başka bir öğretmen adayı da benzer bir yaklaşımla şişenin silindirik kısımları için hacmin değişim göstermeyeceğini belirtmiştir. Oysa içine sürekli su koyulan böyle bir şişede yükseklik artarken hacmin sabit kalması veya azalması gibi bir durum mantıken mümkün değildir. Bu nedenle, bu öğretmen adayı da "yükseklik" ile "birim yüksekliğe düşen hacim miktarını" grafik olarak temsil etmeye çalışmıştır. Fakat bu yaklaşımın grafik temsili ve kovaryasyonel ilişkinin ifade edilmesinde istenenden farklı bir cevaba yol açtığını fark etmemiştir.

Değişkenler arasındaki ilişkiyi verilen dinamik fonksiyonel durumun gerektirdiğinden daha az sayıda bölüm içerecek biçimde temsil etme

Bu çalışmada ele alınan her iki şişenin de üç bölüme sahip olarak seçildiği daha önce belirtilmişti. Bu bölümler, şişelerdeki yükseklik ve hacim arasındaki ilişkinin yorumlanmasında ve değişim oranına yüklenen anlamlarda farklılıklar olacağını göstermektedir. Bu nedenle, bir öğretmen adayının şişelerdeki farklı bölümlerin farkına varması, onun değişim oranını şişenin her yerinde aynı yorumlamaması gerektiğini anladığını göstermede işaret olarak kullanılabilir. Fakat bu çalışmada elde edilen veriler, bazı öğretmen adaylarının şişeleri sanki tek veya iki bölüme sahipmiş gibi ele aldıklarını ortaya çıkarmıştır. Örneğin, Şişe A için çizilen hatalı grafik temsillerinin %16'sının Şekil 8'deki gibi iki veya tek bölmeli bir yapıya sahip olduğu görülmüştür. Aynı tip hatalara Şişe B için çizilen grafik temsillerinin %22'sinde rastlanmıştır.

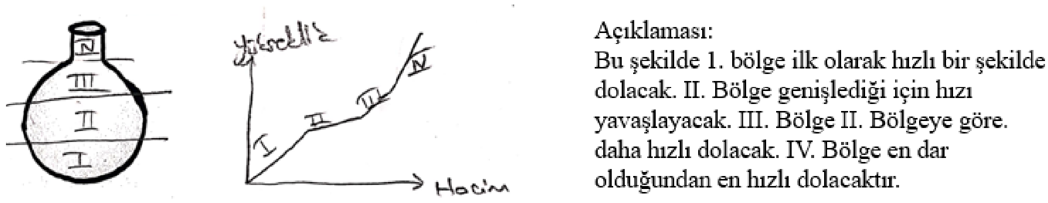


Şekil 8. Şişenin üç yerine iki veya tek bölümlü yorumlandığı grafik temsil örnekleri

Şekil 8'de sunulan temsil örnekleri ve yazılı açıklamalar incelendiğinde, ilk grafik temsilini çizen öğretmen adayının yaptığı açıklama onun sadece iki değişken arasındaki ilişkinin değişimindeki yönü yorumlayabildiğini göstermektedir. Öğretmen adayı, "biri artarsa diğeri de artar" mantığı ile değişkenler arasında doğrusal ilişkinin olduğu bir grafik temsili çizmiştir. Şekil 8'deki ikinci grafiği çizen öğretmen adayının açıklamalarında birim yükseklikte hacmin artış oranına kısmen de olsa bir odaklanma mevcuttur. Fakat bu öğretmen adayının açıklamaları ve grafik temsili onun sadece şişenin yukarı doğru daralmasına odaklandığını ve şişenin silindirik ve silindirik olmayan bölümlerinde ortaya çıkan değişim oranının nasıl yorumlanacağının farkında olmadığını göstermiştir. Şekil 8'deki son grafiği çizen öğretmen adayının ise Şişe A'ya ait grafik temsilini iki parçalı biçimde ve her bir parçayı lineer olarak çizdiği görülmektedir. Bu öğretmen adayının açıklamaları, onun Şişe A'yı iki bölümü var gibi ele alma eğilimi gösterdiğini ortaya çıkarmıştır. Bu öğretmen adayı, şişenin alt silindirik bölümünü ele aldıktan sonra orta kısımdaki silindirik olmayan bölümü ve şişenin en uç bölümünü kabın daralmasına odaklanarak tek bir bölüm gibi ele almıştır. Şekil 8'deki üçüncü grafiğe benzer bir grafik çizen öğretmen adayı Selin klinik görüşmede Şişe A'yı neden iki parça olarak çizdiği sorulduğunda şöyle cevap vermiştir: "Şişenin ortasından sonra bir daralma oluyor. O kısımda ilişki değişir. Dar olduğu için eğim biraz azalır ilk kısma göre." Bu açıklamalar, Selin'in, zihninde şişeyi geniş kısım ve daralan kısım biçiminde iki bölüm olarak canlandırdığını net olarak ortaya çıkarmıştır.

Değişkenler arasındaki ilişkiyi verilen dinamik fonksiyonel durumun gerektirdiğinden daha fazla sayıda bölüm içerecek biçimde temsil etme

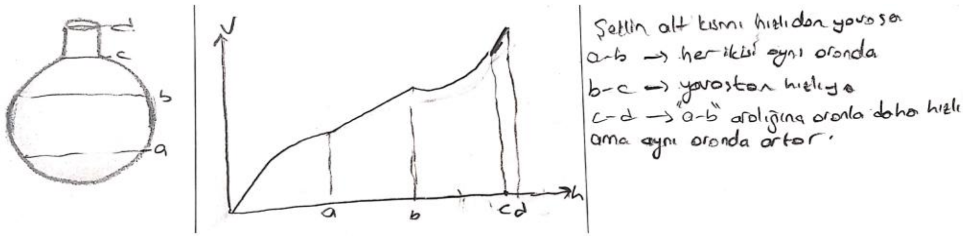
Şişenin olması gerekenden az bölüme ayrılarak iki değişken arasındaki ilişkinin yanlış biçimde incelenmesine ek olarak, öğretmen adaylarının %11'i Şişe B'yi dört veya daha fazla bölüme ayırarak değişkenler arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Örneğin, Şekil 9'da bir öğretmen adayı değişkenler arasındaki ilişkilerin tümünü doğrusal yorumlama hatasına ek olarak şişeyi dört parçaya ayırmıştır. Bu yanlışı yapan öğretmen adayları genel olarak II numaralı bölmede şişenin silindirik olduğunu iddia etmişlerdir. Şekil 9'daki yazılı açıklamalarda, öğretmen adayı değişkenlere atıf vermeden çok yüzeysel ifadeler kullanmıştır. Çünkü "hızı azalan" veya "hızı artan" şeyin ne olduğu yapılan açıklamalarda belirgin değildir. Ayrıca yapılan bu etkinlikte, kabın doluş hızı ile ilgili yorum yapmaları değil birim yükseklikte hacimdeki değişimi yorumlamaları beklenmiştir. Bu durum, öğretmen adayı grafikte her ne kadar hacim ve yükseklik değişkenlerine yer verse de onun "zaman" değişkenine göre "yükseklik" değişimini incelendiğini göstermektedir.



Şekil 9. Şişe B'nin dört bölüme ayrılması sonucu oluşturulan grafik temsili

Benzer bir örnek de değişkenler arasındaki ilişkilerin doğrusal olup olmamasına dikkat eden bir öğretmen adayı olan ve klinik görüşme yapılan Yasemin'in verdiği cevaplardan sunulmuştur. Bu öğretmen adayının Şekil 10'da görüldüğü gibi şişe üzerinde aldığı notlar ve yazılı açıklamaları onun değişkenler arasındaki ilişkiyi incelemek için Şişe B'yi üç yerine dört bölüme ayırdığını net bir biçimde göstermektedir. Fakat öğretmen adayının açıklamalarında değişken isimlerine açık bir şekilde hiç atıfta bulunulmamıştır.

ENAD ONLINE
EĞİTİMDE NİTEL ARAŞTIRMALAR DERGİSİ
Journal of Qualitative Research in Education
Volume 8 / Issue 2, 2020
Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - ENAD
Journal of Qualitative Research in Education - JOQRE



Şekil 10. Öğretmen adayı Yasemin'in Şişe B'yi dört bölüme ayırarak oluşturduğu grafik temsili

Ek olarak, Yasemin'in "yavaştan hızlıya" veya "hızlıdan yavaşa" biçiminde kullandığı ifadeler matematiksel olarak anlaşılır değildir. Şişede a-b aralığı için "her ikisi aynı oranda" ifadesi de neyin her ikisi için aynı oranda olduğunu ve neye "her ikisi" demek istediğini net olarak göstermemektedir. Fakat "her ikisi" ifadesi Yasemin'in hacim ve yükseklik değişkenlerini üçüncü bir değişken üzerinden dolaylı yolla koordine etmeye çalıştığına işaret edebilir. İfadelerdeki bu gibi belirsizlikler nedeniyle bu öğretmen adayıyla görüşme yapılmıştır. Görüşmede öğretmen adayından (Yasemin) cevaplarında ne demek istediğini daha iyi açıklaması şu şekilde istenmiştir:

Araştırmacı	Ben yazılı açıklamalarda ne demek istediğinden emin olamadım. Bana açıklar mısın?
Yasemin	Tabii ki. Ben burada şişeyi dörde böldüm (Şekil 10).
Araştırmacı	Neden 3 değil de 4? Birçok arkadaşın 3 parçaya ayırmış mesela.
Yasemin	Küre yüzünden yaptım. Kürenin orta kısmı, alt ve üst kısma göre düzgün olur. O yüzden orta kısmı ayrı yorumladım.
Araştırmacı	Ben "hızlıdan yavaşa" ve "yavaştan hızlıya" olan şeyin ne olduğunu anlamadım.
Yasemin	Orada yükseklik aslında hızlıdan yavaşa gidiyor. Yazmayı unutmuşum.
Araştırmacı	Yükseklik nasıl hızlıdan yavaşa gidecek ki?
Yasemin	Şöyle: Önce yükseklik çok oluyor sonra kap şekli yüzünden yükseklik hızı düşüyor.
Araştırmacı	Yüksekliğin hızı olur mu?
Yasemin	Yani [yükseklik] artışının hızı aslında.
Araştırmacı	Derslerde bunun matematiksel bir ifadesini öğrendiniz mi artan azalan gibi?
Yasemin	Azalarak artan diyebiliriz evet haklısınız.
Araştırmacı	Şimdi kürenin ortası ile şişenin uç kısmı aynı silindirik yapıda mı?
Yasemin	Tam aynı sayılmaz ama o kadarcık farkı göz ardı ettim.

Görüşme kesitinden de anlaşılacağı üzere, Yasemin tüm açıklamalarında bağımsız değişken olarak hacmi alırken, grafik temsilinde bağımsız değişken olarak yüksekliği kullanmıştır. Ayrıca Yasemin bir nicelikteki değişimi diğer nicelikteki değişimle "birim miktar" düşüncesi üzerinden koordine etmeye çalışmıştır. Görüşmede araştırmacının yönlendirmeleri ile Yasemin'in hızlıdan yavaşa ile azalarak artmayı kast ettiği de ortaya çıkmıştır. Asıl sorun ise Yasemin'in şişenin küresel kısmının tam ortasına silindir muamelesi yapması olmuştur. Bu yaklaşımla, şişenin silindirik ve silindirik olmayan bölümlerinde değişkenlerin ilişkileri farklı olmasına rağmen sanki ikisi de doğrusal bir ilişki gibi resmedilmiştir.

Tartışma ve Sonuç

Bu araştırma, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının iki değişkenin eş zamanlı değişimini içeren dinamik fonksiyonel durumları yorumlarken değişkenler arasındaki ilişkiyi grafik temsilleri aracılığıyla nasıl ifade ettiklerini ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Çalışmada elde edilen sonuçlar, öğretmen adaylarının iki niceliğin eş zamanlı değişimine ilişkin grafik oluşturma konusunda çok büyük zorluklar yaşadıklarını ve çizdikleri grafiklerde önemli eksikliklerinin olduğunu ortaya çıkarmıştır. Çünkü öğretmen adaylarının sadece %6'sı her iki durum için de doğru grafik temsilleri üretebilirken, %70'i her iki durum için de hatalı grafik temsiller oluşturmuştur. Grafik temsillerinde tespit edilen belirgin hatalar ve eksiklikler ise şunlar olmuştur: (i) değişkenler arasındaki farklı doğrusal ilişkiler için eğimleri koordine edememe, (ii) değişkenler arasındaki doğrusal olmayan ilişkileri doğrusal temsil etme, (iii) bağımlı ve bağımsız değişkenlerin rollerini değiştirerek temsil etme ve (iv) değişkenler arasındaki ilişkiyi artan yerine azalan şekilde temsil etme ve (v) değişkenler arasındaki ilişkiyi verilen dinamik fonksiyonel durumun gerektirdiğinden daha az veya fazla sayıda bölüm içerecek biçimde temsil etme. Çalışmada öğretmen adaylarının grafik temsillerinde yaptıkları hatalar ve eksiklikler alan yazındaki öğretmen ve öğretmen adaylarıyla yapılan ilgili çalışma sonuçlarıyla paralellik göstermiştir (Kertil vd., 2019; Şen-Zeytun vd., 2010). Örneğin, Yemen-Karpuzcu vd. (2017) yaptıkları araştırmada iki öğretmen adayının kovaryasyonel düşünme becerilerini ve akranla öğrenme (peer learning) ortamında bu becerilerin nasıl değiştiğini incelemiştir. Çalışmadaki iki öğretmen adayından birinin değişkenlerin ilişkilerini tam anlamadığı ve değişkenleri ters yorumladığı sonucuna ulaşmışlardır. Ayrıca öğretmen adayının biri hangi değişkeni diğer değişkenin bir fonksiyonu olarak ele alacağı konusunda farkındalık içinde hareket edememiştir. Bu nedenle, değişkenler arasındaki ilişkiyi grafiklerde hatalı biçimde temsil etmişlerdir.

Alan yazında yapılan bazı önemli ve kapsamlı çalışmalar, öğretmen adaylarının tasarım-tabanlı bir araştırma deseninde belli bir tecrübe sonrasında değişkenler arasındaki ilişkiyi en azından miktar anlamında koordine edebildiklerini göstermiştir (örn., Kertil vd., 2019). Bu çalışmada kovaryasyonel düşünme konusundaki tecrübe yoksunluğunun da etkisiyle öğretmen adaylarının hiçbirinin değişkenleri miktar anlamında koordinasyonunun ötesinde yorumlayamadığı ortaya çıkmıştır. Bu çalışmada her ne kadar öğretmen adaylarının ürettikleri grafik temsillerinin niteliğine odaklanılsa da öğretmen adaylarının yaptıkları yazılı açıklamalar onların hiçbirinin kovaryasyonel düşünmede Carlson vd. (2002) tarafından önerilen 5 düzeyli teorik çerçevede ileri düzeyde bulunan "ortalama değişim oranını" ve "anlık değişim oranını" kullanarak açıklama sunamadığını göstermiştir. Hatta birçok öğretmen adayı, bağımsız değişkende miktar olarak artış olacağını iddia ederken bağımlı değişkende artış olması gereken durumda azalma olacağını söylemiştir. Bu durumun sonucu olarak da artan değil azalan grafikler çizmişlerdir. Bu durum öğretmen adaylarının kovaryasyonel düşünmenin teorik yapısında belirtilen en alt seviyede iki değişkenin değişimine odaklanabildiklerini fakat bu değişimin yönünü dahi doğru belirleyemediklerini göstermiştir (Carlson vd., 2002; Kertil vd., 2019; Thompson ve Carlson, 2017). Değişkenlerin yorumlanmasındaki diğer önemli bir sorun da iki değişkenin birbirinden bağımsız değişime uğruyor gibi düşünülerek yorumlanması olmuştur (örn., Hacim hızlıca artar ama yükseklik zamanla biraz yavaş artar). Bu durum, bazı öğretmen adaylarının değişkenleri koordine etme konusunda doğrudan ve sistematik bir anlayıştan uzak olduklarını işaret etmiştir (Kertil, 2020; Thompson ve Carlson, 2017).

Diğer araştırmalarda da belirtildiği gibi (Rowland ve Jovanoski, 2004; Zandieh ve Knapp, 2006), öğretmen adaylarının çoğu, değişim oranını bir değişkendeki değişim miktarlarını esas alarak yorumlamaya çalışmışlardır. Bu gibi hatalar nedeniyle de 3 farklı bölümü olan şişelerin grafiklerini bir veya iki bölüme sahip olacak şekilde çizmişlerdir ve şişelerin bölümlerindeki değişim oranının yorumunda oluşacak farklılıkları görememişlerdir. Esasında bu durumun en önemli nedenlerinden biri, öğretmen adaylarının şişe etkinliğindeki gibi gerçek-yaşam bağlamında nitel olarak değişim oranını yorumlamaya alışık olmamaları olabilir. Çünkü lisans eğitimi sürecinde değişim oranını içeren matematiksel kavramlar genel olarak onlara sembolik ve fonksiyonel yapıda sunulmaktadır. Hatta görüşmelerde bazı öğretmen adayları şişe-grafik etkinliğini bir "fizik dersi" etkinliği olarak gördüğünü dile getirmiştir. Sonuç olarak, alan yazında belirtildiği gibi (Herbert ve Pierce, 2012; Wilhelm ve Confrey, 2003) öğretmen adayları hız-zaman gibi fizik ders içeriklerinde görmeye alışık oldukları kinematik bağlamlarda sunulan değişim oranı kavramını matematiksel olarak yorumlamakta ve grafik temsilleri ile ifade etmekte güçlük yaşamışlardır.

Diğer taraftan, bu araştırmanın sonuçları Matematik Öğretmenliği Bölümü öğretmen adaylarının doğrusal olan ve doğrusal olmayan ilişkileri büyük oranda ayırt edemediklerini göstermiştir. Hatta bazı öğretmen adayları değişkenler arasındaki doğrusal ilişkiye şişenin şeklini düşünerek karar vermiştir. Bu durum alan yazında sabit şekil üzerinden düşünme (static shape thinking) olarak adlandırılmaktadır (Moore ve Thompson, 2015). Birçok öğretmen adayı, küre şeklindeki bir şişede grafikteki değişkenler arasındaki ilişkinin doğrusal olmayacağını fakat Şişe A'nın kesik koni gibi olan bölümünü iki boyutlu bir şekil olan çokgene (özel olarak yamuğa) benzettikleri için değişkenler arasındaki ilişkinin doğrusal olacağını belirtmişlerdir. Bu sonuç, öğretmen adaylarının bir değişkendeki değişimin diğer değişken üzerindeki etkisini yüzeysel anlamda bile yorumlayamadıklarını göstermiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının grafik temsillerini açıklamak için yazdıkları matematiksel açıklamalarda hem değişkenlere anlam yüklemekte hem de matematiksel olarak değişim oranı gibi kavramları ifade etmede hata ve eksiklikler sergiledikleri görülmüştür. Bu açıklamalarda "zaman" ikincil bir bağımsız değişken gibi kullanılırken, değişim oranı yerine "hızlanma/yavaşlama", "ivmelenme", "artandan azalana" ve "azalandan artana" gibi kelimeler kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının yazdıkları ifadelerdeki matematiksel dilinin özellikleri bu araştırmanın amacının dışında olduğu için tüm detaylarıyla kodlanarak ele alınmasa da grafikleri incelerken görülen matematiksel dil eksiklikleri onların kovaryasyonel düşünme anlamında ciddi eksikliklerinin varlığına işaret etmiştir. Bu yüzden, varılan bu sonuç konuyla ilgili daha kapsamlı ve iyileştirici çalışmalara olan ihtiyacı da gözler önüne sermiştir.

Öneriler

Bu kısımda bu çalışmadan edinilen sonuçlar ışığında kovaryasyonel düşünme ile ilgili tasarlanacak çalışmalara yön verebilecek bazı önerilere yer verilmiştir. Bu çalışmada kullanılan iki niceliğin eş zamanlı değişimini içeren şişe etkinliğinde bilgisayar ortamında dinamik bir yazılım kullanılmamıştır. Yapılan bazı çalışmalar, dinamik yazılım kullanmanın kovaryasyonel düşünme becerileri üzerindeki olumlu etkilerini vurgulamaktadırlar (Johnson, McClintock ve Hornbein, 2017; Kertil, 2020; Moore ve Carlson, 2012). Bu nedenle, ilerki çalışmalarda bilgisayar ortamlarında animasyon içerikleriyle kovaryasyonel düşünme becerileri geliştirilebilir. Diğer bir öneri ise temsiller arası geçişleri destekleyecek bir eğitim programının öğretmen adaylarına uygulanması olabilir. Bu çalışmada, öğretmen adaylarından şişeleri inceleyerek grafik çizmeleri ve açıklamalar yazmaları istenmiştir. Yazılan açıklamalar, çizilen grafik temsilleri ve şişeler arasındaki temsil geçişlerinde belli olası ilişkilerin olduğu fark edilmiştir. Bu nedenle, yapılacak çalışmalarda temsiller arası geçiş ile hem öğretmen adaylarının kovaryasyonel düşünme becerileri ele alınabilir hem de temsil geçiş süreçlerinde bu becerilerin nasıl harekete geçtiği sistematik yollarla keşfedilebilir.

Bu çalışma, öğretmen adaylarının değişkenlerin doğrusal olan ve doğrusal olmayan ilişkilerini ayırt etme konusunda önemli problemler yaşadıklarını göstermiştir. Orantısal olan ve olmayan durumların anlaşılması ortaokul matematiğinde doğrusal denklemler, grafikler ve oran gibi kavramlar için kritik olduğundan, öğretmen adaylarına doğrusal ilişkileri doğrusal olmayan ilişkilerden ayırt etmelerine yardımcı olacak fırsatlar sunulmalıdır. Bu eksiklikler öğretmen adaylarının değişim oranını kavramsal boyutta anlamlandıramaması ile ilişkilidir. Çünkü değişim oranını anlamak, bağımlı ve bağımsız değişkenlerin kovaryasyonel olarak nasıl değişim gösterdiğinin incelenerek ele alınan fonksiyonun hangi fonksiyon ailesine ait olduğunu bulmayı sağlar (Cooney, Beckmann, Lloyd, Wilson ve Zbiek, 2010; Kertil vd., 2017). Bu konuda ilk olarak doğrusal ilişkilerde eğimi koordine etmelerine fırsat veren uygulamalar yapılabilir. Örneğin, silindirik iki veya üç bölüm içeren bir şişe için grafik temsilleri oluşturularak sınıf tartışmaları yapılabilir. Gelecek çalışmalar için diğer önemli bir öneri de lisans ders içeriklerinin düzenlenmesiyle ilgili verilebilir. Bu çalışma öğretmen adaylarının bağlamsal içeriklerde değişim oranını yorumlarken bu durumu "matematik dersinden" ziyade "fizik dersi gibi" gördüklerini göstermiştir. Bu nedenle, ileride analiz gibi derslerin anlatımında sadece hız-zaman gibi kinematik bağlamlarında değil çeşitli birçok gerçek yaşam bağlamında değişim oranı kavramı tartışılabilir ve grafik temsilleri üretilebilir. Bu konuda yapılan çalışmalar da kinematik bağlamlar dışındaki bağlamlarda değişim oranının incelenmesinin öğrencilerin kovaryasyonel düşünme becerilerine katkı sağladığını vurgulamaktadır (örn., Doorman ve Gravemeijer, 2009).

Kaynaklar / References

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In J. J. Kaput, E. Dubinsky, & A. H. Schoenfeld (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, III. issues in mathematics education* (Vol. 7, pp. 115–162). Washington, DC: American Mathematical Society.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352–378.

Carlson, M., Larsen, S., & Lesh, R. (2003). Integrating models and modeling perspective with existing research and practice. In R. Lesh, & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modeling perspective* (pp. 465–478). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66–86.

Cooney, T. J., Beckmann, S., Lloyd, G. M., Wilson, P. S., & Zbiek, R. M. (2010). *Developing essential understanding of functions for teaching mathematics in grades 9-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Doorman, L. M., & Gravemeijer, K. P. E. (2009). Emergent modeling: Discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM-Mathematics Education*, *41*(1-2), 199–211.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C., & Amidon, J. (2015). Quantifying exponential growth: Three conceptual shifts in coordinating multiplicative and additive growth. *The Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 135–155. doi:10.1016/j.jmathb.2015.06.004

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1-3), 111–129.

Herbert, S., & Pierce, R. (2012). Revealing educationally critical aspects of rate. *Educational Studies in Mathematics*, *81*, 85–101.

Johnson, H. L. (2015). Secondary students' quantification of ratio and rate: A framework for reasoning about change in covarying quantities. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 64–90.

Johnson, H. L., McClintock, E., & Hornbein, P. (2017). Ferris wheels and filling bottles: A case of a student's transfer of covariational reasoning across tasks with different backgrounds and features. *ZDM–Mathematics Education, 49*(6), 851–864. doi:10.1007/s11858-017-0866-4

Jones, S. R. (2017). An exploratory study on student understandings of derivatives in real-world, non-kinematics contexts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *45*, 95–110. doi:10.1016/j.jmathb.2016.11.002

Kertil, M. (2020). Matematik öğretmen adaylarının kovaryasyonel düşünme becerileri: Dinamik animasyonlar nasıl etkiliyor?. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*. Advance online publication. doi:10.16949/turkbilmat.652481.

Kertil, M., Erbas, A. K., & Cetinkaya, B. (2017). Pre-service elementary mathematics teachers' ways of thinking about rate of change in the context of a modeling activity. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT), 8*(1), 188–217.

Kertil, M., Erbas, A. K., & Cetinkaya, B. (2019). Developing prospective teachers' covariational reasoning through a model development sequence. *Mathematical Thinking and Learning*, *21*(3), 207–233. doi:10.1080/10986065.2019.1576001

Koklu, O., & Jakubowski, E. (2010). From interpretations to graphical representations: A case study investigation of covariational reasoning. *Eurasian Journal of Educational Research*, *40*, 151–170.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2018). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7, ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara, Turkey.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.*), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes (Vol. 25, pp. 175–193). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Monk, S., & Nemirovsky, R. (1994). The case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes. In E. Dubinsky, A. H. Shoenfeld & J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education I* (pp. 139–168). Providence, RI: American Mathematical Society.

Moore, K. C., & Carlson, M. P. (2012). Students' images of problem contexts when solving applied problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 48–59. doi:10.1016/j.jmathb.2011.09.001.

Moore, K. C., & Thompson, P. W. (2015, February). Shape thinking and students' graphing activity. In *Proceedings of the 18th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 782–789). Pittsburgh, PA: RUME.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Paoletti, T., & Moore, K. C. (2017). The parametric nature of two students' covariational reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 137–151. doi:10.1016/j.jmathb.2017.08.003

Rowland, D. R., & Jovanoski, Z. (2004). Student interpretation of the terms in first-order ordinary differential equations in modeling contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(4), 505–516.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous covariation. In S B. Berenson, K. R. Dawkins, M. Blanton, W. N. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood, & L. Stiff (Eds.), *Proceedings of the twentieth annual meeting of the North American chapter of the International group for the psychology of mathematics education* (Vol. I, pp. 298–303). Raleigh: North Carolina State University.

Stalvey, H. E., & Vidakovic, D. (2015). Students' reasoning about relationships between variables in a real-world problem. *The Journal of Mathematical Behavior*, *40*, 192–210. doi:10.1016/j.jmathb.2015.08.002

Swan, M. (1985). *The language of functions and graphs*. Shell Centre & Joint Matriculation Board, Nottingham.

Şen-Zeytun, A., Cetinkaya, B., & Erbas, A. K. (2010). Mathematics teachers' covariational reasoning levels and predictions about students' covariational reasoning. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *10*(3), 1601–1612.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education 1* (pp. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education* (pp. 33–57). Laramie: University of Wyoming.

Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning. In K. Leatham (Ed.), *Vital directions for research in mathematics education* (pp. 57–93). New York, NY: Springer.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *First compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). Reston, VA: NCTM.

Thompson, P. W., Hatfield, N. J., Yoon, H., Joshua, S., & Byerley, C. (2017). Covariational reasoning among U.S. and South Korean secondary mathematics teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 95–111. doi:10.1016/j. jmathb.2017.08.001

Van de Walle, J., Karp, K.S., & Bay-Williams J.M. (2019). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally* (10th ed.) New York, NY: Pearson Education, Inc.

Wilhelm, J. A., & Confrey, J. (2003). Projecting rate of change in the context of motion onto the context of money. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(6), 887–904.

Wilkie, K. J. (2019). Investigating students' attention to covariation features of their constructed graphs in a figural pattern generalisation context. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1–22. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09955-6

Yemen-Karpuzcu, S., Ulusoy, F., & Işıksal-Bostan, M. (2017). Prospective middle school mathematics teachers' covariational reasoning for interpreting dynamic events during peer interactions. *International Journal of Science and Mathematics Education. 15*(1), 89–108.

Zandieh, M. J., & Knapp, J. (2006). Exploring the role of metonymy in mathematical understanding and reasoning: The concept of derivative as an example. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 1–17.

Yazar

Fadime ULUSOY

İletişim
Kastamonu Universitesi
Eğitim Fakültesi
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü
Kastamonu, Türkiye
E-mail: fadimebayik@gmail.com

Summary

Purpose and Significance. The coordination of simultaneous changes in quantities forms the basis of important mathematical concepts such as rate of change, function, slope, and derivative (Carlson et al., 2002; Carlson et al., 2003). In recent years, the topic of covariational reasoning has been frequently addressed on different subjects such as parametric functions (Paoletti & Moore, 2017; Stalvey & Vidakovic, 2015), exponential functions (Ellis et al., 2015), rate of change and proportion (Johnson, 2015), derivative (Jones, 2017) and pattern generalization (Wilkie, 2019). Studies show that learners have great difficulties in understanding the university level mathematical concepts (e. g. limit, derivative) due to problems in their functional thinking abilities (Monk, 1992; Monk & Nemirovsky, 1994). Although covariational reasoning has a critical role in understanding mathematics conceptually from middle school to university level (Thompson & Carlson, 2017), it is seen that the studies mostly focus on university students' covariational reasoning abilities. On the other hand, it is noteworthy that the studies related to prospective teachers' covariational reasoning abilities are limited (Stalvey & Vidakovic, 2015; Şen-Zeytun et al., 2010; Yemen-Karpuzcu et al., 2017). In these studies, it was emphasized that prospective teachers' covariational reasoning abilities were quite low in terms of coordinating the relationship between variables and assigning the variables correctly.

At the middle school level, students begin to learn covariational reasoning by studying different patterns in various contexts (NCTM, 2000). In addition, students learn proportion, rate, slope and linear equations within the middle school mathematics curriculum. Therefore, it is important for students to comprehend the logic of covariational thinking at the middle school level in order to understand the advanced mathematics topics such as limit, derivative and integral that they will learn in the following years (Confrey & Smith, 1995). In this respect, mathematics educators emphasize that students should work on the concept of rate of change at an early age (Confrey & Smith, 1995; Thompson, 1994). Dynamic functional events play an important role as they provide the relationship between the rate of change and covariational reasoning (Carlson, 1998; Confrey & Smith, 1995). On the other hand, dynamic functional events also require a context that can be transferred to the graphical representations. In this way, the graphs give students the opportunity to see the details of their own conceptions on two simultaneous changing quantities. However, in order to support students' developments in covariational reasoning, teachers' content knowledge should be sufficient (Thompson, 2013; Thompson & Carlson, 2017). In this regard, Thompson et al. (2017) state that it is not usual for teachers to interpret and recognize the meaning of covariation in graphs. Many studies also mention the necessity for the research and development of the covariational reasoning abilities of teachers and prospective teachers (e. g. Carlson et al., 2003; Paoletti & Moore, 2017; Thompson & Carlson, 2017). Therefore, to investigate what the prospective teachers know about covariational reasoning before completing the undergraduate program and to eliminate their deficiencies in this topic, this study aims to reveal how prospective teachers express the relationship between variables through graphical representations when interpreting a dynamic functional event involving two simultaneous changing quantities.

Methodology. The study has a holistic case study design because it includes details about qualitative data obtained in the first step of a teaching experiment designed to develop prospective teachers' covariational reasoning abilities through representational fluency and group works. The participants were 100 middle school prospective mathematics teachers (PMTs) at a public university. The dynamic situation of filling bottles with water continuously is

used to examine prospective teachers' covariational reasoning and graphing abilities. In the task, prospective teachers were asked to draw the height-volume graphs of the bottles and explain the relationship between the two variables verbally. After written data was collected, eight prospective teachers were selected to make interviews on their representations and written responses. The data were analyzed according to content analysis. At the first stage, the frequencies of correct and incorrect graphical representations were calculated in four ways: (i) graphical representation of Bottle A is correct but graphical representation of Bottle B is incorrect, (ii) graphical representation of Bottle B is correct but graphical representation of Bottle A is incorrect, (iii) graphical representations of both bottles are incorrect, and (iv) graphical representations of both bottles are correct. After this frequency analysis, the most common errors and deficiencies in the graphical representations were categorized under certain themes considering the use of variables, the interpretation of linear and non-linear parts of bottles in the graphs.

Results, Discussion, and Conclusion. The findings showed that only 6 (6%) prospective teachers' graphical representations for both bottles were correct. On the other hand, 70% of the prospective teachers drew both graphical representations of height-volume relationships in the bottles incorrectly. The most significant and common problems in the graphs were summarized as follows: (i) Inability to coordinate slopes for linear relationships between variables: 51% of PMTs could not coordinate slopes in the different cylindrical parts of Bottle A in the graphical representation although Bottle A has two different cylindrical parts having different base areas. (ii) Representing nonlinear relations of variables as linear relations: 44% of the PMTs generally perceived the second part of Bottle A as a smooth geometric shape (trapezoid) and did not take into account the rate of change considering the amount of water per unit height. Similar errors were found in 20% of the graphical representations of Bottle B, but the most of these PMTs decided to linearity by focusing on the spherical shape of the bottom of the Bottle B. They believed that if a bottle has a spherical shape, the relationship between variables becomes non-linear. (iii) Reversing the roles of dependent and independent variables: In the covariation task, PMTs asked to draw height-volume graphs for the bottles. However, although 11% of PMTs understood the nonlinear relationship between height and volume in the second part of Bottle A, they reversed the roles of dependent and independent variables when drawing graphical representations. Similar problems were found in 27% of the graphical representations of Bottle B. (iv) Representing the relationship between variables as decreasing rather than increasing based on gross quantification: In both bottles (Bottle A and Bottle B) which are continuously filled with water, the increment in height will provide an increment in the volume automatically. At this point, the most important thing is how the change in one variable affects the increment in the other variable. This increment can occur at an increasing rate, decreasing rate or constant rate. However, 10% of the graphical representations drawn for Bottle A revealed that the volume would decrease or remain constant despite the increments in height variable. The same type of errors was found in 20% of the graphical representations of Bottle B. These results showed that prospective teachers have insufficient knowledge to differentiate linear relations from non-linear relations, to understand the role of variables, to conceptualize rate of change and to use correct and precise mathematical language, which are important for middle school mathematics topics such as slope, linear equations, and proportion. In future studies, animated dynamic situations in technology-supported environments can be used to support prospective teachers' knowledge of linear and nonlinear relationships. Furthermore, transitions between verbal, graphic and visual representations can be utilized to develop the quality of prospective teachers' written explanations about rate, ratio, and proportion.